MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2027

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Modelo 2027

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dos rectas r y s en un mismo plano π se cortan perpendicularmente en un punto C. La recta r está determinada por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(0,2,4)$ y la recta s está determinada por $A(0,4,2)$ y el punto C.

a) (1 punto) Halle las ecuaciones del plano π y las coordenadas de C.

b) (1 punto) Halle un punto R de la recta s tal que la distancia de R a Q sea igual a la distancia de P a Q.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2027 - Opción Única)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} P(1,0,2) \\ \vec{d}_r = \overrightarrow{PQ} = (-1,2,2) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = 2\mu \\ z = 2+2\mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

a) $$\pi \equiv \begin{cases} P(1,0,2) \\ \vec{d}_r = (-1,2,2) \\ \overrightarrow{AP} = (1,-4,0) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x+2y+2z-12=0$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv 4x+y+z-6=0}$$

$$\left.\begin{matrix} A \in s \\ s \perp r \end{matrix}\right\} \implies s \subset \pi' \equiv \begin{cases} A(0,4,2) \\ \vec{n}_{\pi'} = \vec{d}_r = (-1,2,2) \end{cases} \implies \pi' \equiv -x+2y+2z+D=0$$

$$\xrightarrow{A \in \pi'} 0+8+4+D=0 \implies D=-12 \implies \pi' \equiv -x+2y+2z-12=0$$

$$C = r \cap \pi' \implies -(1-\mu)+2\cdot 2\mu+2\cdot(2+2\mu)-12=0 \xrightarrow{\mu=1} \boxed{C(0,2,4)}$$

$$s \equiv \begin{cases} A(0,4,2) \\ \vec{d}_s = \overrightarrow{AC} = (0,-2,2) \approx (0,1,-1) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 4+\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Sea $R(0,4+\lambda,2-\lambda) \in s$

$$d(R,Q) = d(P,Q) \implies \left|\overrightarrow{RQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \implies |(0,-2-\lambda,2+\lambda)| = |(-1,2,2)|$$

$$\implies \sqrt{(-2-\lambda)^2+(2+\lambda)^2} = \sqrt{1+4+4} \implies 4+4\lambda+\lambda^2+4+4\lambda+\lambda^2=9$$

$$\implies 2\lambda^2+8\lambda-1=0 \implies \begin{cases} \lambda = -2-\frac{3\sqrt{2}}{2} \implies R_1 = \left(0, 2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 4+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\ \lambda = -2-\frac{3\sqrt{2}}{2} \implies R_2 = \left(0, 2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 4-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea la función:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

a) (1 punto) Halle las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle $\int_0^{\ln 3} (f(x) + 1)\, dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2027 - Opción Única)

Solución.

a)
- `Dominio:` $e^x + 1 = 0 \implies e^x = -1 \implies \nexists$ Solución $\implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `A. Vertical:` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \implies \nexists A.V.$
- `A. Horizontal:`
  - $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \dfrac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \implies \exists \underset{x \to -\infty}{A.H.} \text{ en } y = -1$
  - $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1 \implies \exists \underset{x \to +\infty}{A.H.} \text{ en } y = 1$

b) $$F(x) = \int [f(x) + 1]\, dx = \int \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} + 1\right) dx = \int \frac{e^x - 1 + e^x + 1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{2e^x}{e^x + 1}\, dx$$

$$= 2 \int \underbrace{\frac{e^x}{e^x + 1}}_{u'/u}\, dx = 2 \cdot \ln|e^x + 1| + C$$

$$\int_0^{\ln 3} [f(x) + 1]\, dx = F(\ln 3) - F(0) = 2 \cdot \ln|3 + 1| - 2 \cdot \ln|1 + 1| = 2 \cdot \ln 4 - 2 \cdot \ln 2$$

$$= 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right) = 2 \cdot \ln 2 = \ln 4$$

HTTPS://APRENDEMATEMATICAS.COM

———————— ∘ ————————

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Para llegar a tiempo a primera hora al instituto, Ana debe coger a las ocho de la mañana una de las tres líneas, $L1$, $L2$ o $L3$, que parten de la estación de autobuses y tienen parada cerca del instituto. Las probabilidades de poder coger los autobuses a las ocho de la mañana en esta estación son de $\frac{2}{3}$ para $L1$, $\frac{4}{5}$ para $L2$ y $\frac{3}{5}$ para $L3$. Estos tres sucesos son independientes. Si Ana está a las 8 de la mañana en la estación de autobuses, se pide:

a) *(1 punto) Calcular la probabilidad de que Ana llegue a tiempo a primera hora a su instituto.*

b) *(1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:*

b.1) *Calcular la probabilidad de que no pueda coger la línea $L2$ sabiendo que solo puede coger una de las otras dos líneas.*

b.2) *Calcular la probabilidad de que pueda coger exactamente dos de las tres líneas.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2027 - Opción Única)

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Solución.

Sean los sucesos:

$L1 \equiv$ "Ana coge el autobús de la línea $L1$" $\quad L2 \equiv$ "Ana coge el autobús de la línea $L2$"
$L3 \equiv$ "Ana coge el autobús de la línea $L3$" $\quad T \equiv$ "Ana llega a tiempo al instituto

a) $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 1 - P(\overline{L1} \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) = 1 - P(\overline{L1}) \cdot P(\overline{L2}) \cdot P(\overline{L3}) = 1 - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2}{5}$

$= 1 - \dfrac{2}{75} = \dfrac{73}{75} \simeq 0.9733$

b) b.1) $P\big(\overline{L2} \mid (L1 \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap L3)\big) = \dfrac{P\big(\overline{L2} \cap \big(L1 \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap L3)\big)\big)}{P\big((L1 \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap L3)\big)}$

$= \dfrac{P(\overline{L2} \cap L1 \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L2} \cap \overline{L1} \cap L3)}{P(L1 \cap \overline{L3}) + P(\overline{L1} \cap L3)} = \dfrac{P(L1 \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) + P(\overline{L1} \cap \overline{L2} \cap L3)}{P(L1) \cdot P(\overline{L3}) + P(\overline{L1}) \cdot P(L3)}$

$= \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}} = \dfrac{1}{5} = 0.2$

b.2) $P\big((\overline{L1} \cap L2 \cap L3) \cup (L1 \cap \overline{L2} \cap L3) \cup (L1 \cap L2 \cap \overline{L3})\big)$

$= P(\overline{L1} \cap L2 \cap L3) + P(L1 \cap \overline{L2} \cap L3) + P(L1 \cap L2 \cap \overline{L3})\big)$

$= P(\overline{L1}) \cdot P(L2) \cdot P(L3) + P(L1) \cdot P(\overline{L2}) \cdot P(L3) + P(L1) \cdot P(L2) \cdot P(\overline{L3})$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{34}{75} = 0.453$

———— ∘ ————

Ejercicio 4A (2 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+2)x + y + z = a \\ x - ay + 3z = 0 \\ 3x + ay + z = 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2027 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

HTTPS://APRENDEMATEMATICAS.COM

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 3 & 0 \\ 3 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -4a^2 - 4a + 8 = 0 \implies a = \{-2, 1\}$$

- Si $a \neq \{-2, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouches}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow 3x + \frac{1}{4} + 2\lambda + \lambda = 1 & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} - \lambda \\ y = \frac{1}{4} + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\ , \lambda \in \mathbb{R}} \\ \Rightarrow -4y + 8\lambda = -1 & \Rightarrow & \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow & \end{array}$$

Ejercicio 4B (2 *puntos*)

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un número real.

a) (1 punto) Determine para qué valores de a la matriz A^{2026} es invertible.

b) (1 punto) Para $a = 0$, pruebe que $A^3 = 2A$ y calcule la matriz A^9.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2027 - Opción B)

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Solución.

a) $|A^{2026}| = |A|^{2026} = (a^3 - 2a)^{2026} = [a \cdot (a^2 - 2)]^{2026} = 0 \implies a = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

$\implies \exists\ (A^{2026})^{-1}\ \forall a \neq \{0, \pm\sqrt{2}\}$

b) Para $a = 0 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2A \text{ q.e.d.}$$

$$A^9 = (A^3)^3 = (2A)^3 = 8A^3 = 8 \cdot 2A = 16A = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5A (2 *puntos*)

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{, si } x\in[0,2]\\ ax^2+bx & \text{, si } x\in(2,5)\\ -(x-5)^2+15 & \text{„ si } x\in[5,7]\end{cases}$$

a) (1 punto) Halle los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $[0.7]$.

b) (1 punto) La longitud de la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $[x_0,x_1]$ se calcula con la integral $L=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. Utilice la fórmula dada par calcular la longitud de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2027 - Opción A)

Solución.

a)

- `Dominio:` $\mathrm{Dom}(f)=[0,7]$ pues todas las ramas son polinómicas.
- `Continuidad en` $x=2$`:`
  - $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(2x+2)=6$
  - $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\big(ax^2+bx\big)=4a+2b$
  - $f(2)=2\cdot2+2=6$

  $f(x)$ continua en $x=2\iff\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)\Rightarrow 4a+2b=6\Rightarrow$ ⦿ $2a+b=3$
- `Continuidad en` $x=5$`:`
  - $\lim\limits_{x\to5^-}f(x)=\lim\limits_{x\to5}\big(ax^2+bx\big)=25a+5b$
  - $\lim\limits_{x\to5^+}f(x)=\lim\limits_{x\to5}\big[-(x-5)^2+15\big]=-15$
  - $f(5)=-15$

  $f(x)$ continua en $x=5\iff\lim\limits_{x\to5}f(x)=f(5)\Rightarrow 25a+5b=15\Rightarrow$ ⊛ $5a+b=3$

Por lo tanto $f(x)$ es continua en su dominio si se cumple:

$$\begin{cases}\text{⦿ } 2a+b=3\\ \text{⊛ } 5a+b=3\end{cases}\Longrightarrow\boxed{\begin{array}{c}a=0\\ b=3\end{array}}$$

b) En la rama $[0,2]\implies f(x)=2x+2\implies f'(x)=2$

$$L=\int_0^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+2^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{5}\,dx=\sqrt{5}x\Big]_0^2=2\sqrt{5}\ u$$

———————— ○ ————————

HTTPS://APRENDEMOSCONMIGOMELON.COM

Ejercicio 5B (2 *puntos*)

Sea $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x-1}$.

a) *(1 punto) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$.

b) *(1 punto) Halle, si existen, los puntos de la gráfica de* $f(x)$ *cuya recta tangente tenga pendiente* 1.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2027 - Opción B)

Solución.

a) $x-1=0 \implies x=1 \implies \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

$f'(x)=\dfrac{-2\cdot(x-1)-(-2x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0\,\forall x\in\text{Dom}(f) \implies \nexists$ E. relativos.

La función es *creciente* en su dominio.

b) $m_r=f'(x_0)=\dfrac{1}{(x_0-1)^2}=1 \implies (x_0-1)^2=1 \implies x_0-1=\pm 1 \implies \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=2 \end{cases}$

- $x_0=0 \implies y_0=f(x_0)=f(0)=-1 \implies (x_0,y_0)=(0,-1)$

  $r\equiv y-y_0=m_r\cdot(x-x_0) \implies y+1=1\cdot(x-0) \implies \boxed{r_1\equiv y=x-1}$

- $x_0=2 \implies y_0=f(x_0)=f(2)=-3 \implies (x_0,y_0)=(2,-3)$

  $r\equiv y-y_0=m_r\cdot(x-x_0) \implies y+3=1\cdot(x-2) \implies \boxed{r_2\equiv y=x-5}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM