MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2027

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



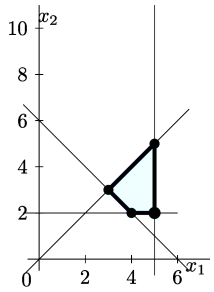
HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Modelo 2027

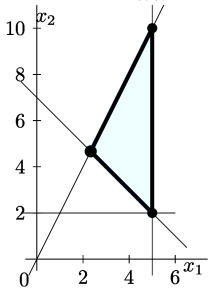
Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

El restaurante de un reconocido chef atrae la atención de sus clientes por el prestigio gastronómico de sus platos elaborados siempre con productos de primera calidad. Sin embargo, el mayor atractivo para la clientela es su salsa secreta. Por ello, la gestión eficiente de esta receta y su correcto uso en los platos que conforman su oferta gastronómica es de vital importancia. La receta requiere el uso de dos ingredientes I_1 e I_2 cuyo nombre no puede desvelarse. Su mezcla será diluida posteriormente en un caldo previamente elaborado por el chef para obtener un litro de salsa. Para que la receta de la salsa secreta sea satisfactoria, es necesario que se usen a lo sumo 5 g del ingrediente I_1 y al menos 2 g del ingrediente I_2. La suma de las cantidades de ambos ingredientes debe ser al menos 6 g y la cantidad de ingrediente I_2 no puede exceder dos veces la cantidad del ingrediente I_1. Además, se sabe que los costes por cada gramo de los ingredientes I_1 e I_2 son respectivamente 20 y 30 céntimos de euro.

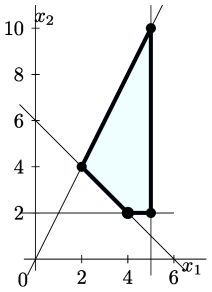
a) *(0.5 puntos) Si x_1 y x_2 son las cantidades utilizadas de los ingredientes I_1 e I_2 respectivamente, indique cuál de las siguientes regiones representa el conjunto de valores que pueden tomar los ingredientes de acuerdo con el enunciado del problema.*



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

b) *(1 punto) Obtenga las cantidades de los ingredientes en la mezcla de tal modo que minimice su coste, manteniendo las propiedades de calidad de la misma. Indique el coste de un litro de salsa elaborada.*

c) *(1 punto) El chef ha preparado 10 litros de salsa secreta para elaborar 3 platos diferentes P_1, P_2 y P_3 para los comensales del servicio de cena de esta noche. Para evitar el desperdicio de salsa secreta, se debe consumir la totalidad de la salsa. Además, se sabe que el plato P_1 usa exactamente el doble de cantidad de salsa secreta que el plato P_2 y que los platos P_2 y P_3 usan conjuntamente 4 litros en su preparación. ¿Es posible realizar este reparto de salsa secreta entre los tres platos? En caso afirmativo, obtenga la cantidad de salsa secreta que necesitarán.*

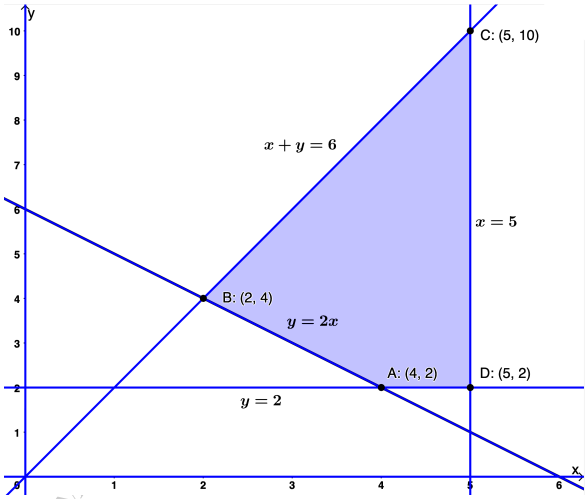
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2027 - Opción Única)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Cantidad de I_1 (gr)"
  $y \equiv$ "Cantidad de I_2 (gr)"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} (1)\ x+y \geq 6 & \to (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ (2)\ y \leq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (3,6) \\ (3)\ x \leq 5 & \to (5,0) \\ (4)\ y \geq 2 & \to (0,2) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 20x + 30y$ (céntimos de €)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	4	2	140
B	2	4	160
C	5	10	400
D	5	2	160

a) La región factible corresponde a la *figura* 3

b) El *coste mínimo* es de 140 céntimos (1.4 €) y se obtiene con 4 gr de ingrediente I_1 y 2 gr de ingrediente I_2.

c) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Cantidad de salsa secreta del plato } P_1\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de salsa secreta del plato } P_2\text{”}$$
$$z \equiv \text{“Cantidad de salsa secreta del plato } P_3\text{”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x=2y \\ y+z=4 \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z=10 \\ x-2y=0 \\ y+z=4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+3+1=10 \\ \Rightarrow -3y-1=-10 \\ \Rightarrow 2z=2 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=6 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}}$$

Por lo tanto han de usarse 6 litros de salsa para el plato P_1, 3 litros para el plato P_2 y 1 litro para el plato P_3.

———— ○ ————

HTTPS://APRENDECONMIGON.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expreesión:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-5}$$

a) *(1.5 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de esta función.*

b) *(1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x_0 = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2027 - Opción A)

Solución.

a)

- `Dominio:` $x - 5 = 0 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{5\}$
- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = 5$

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{(x-1)^2}{x-5} = \left[\frac{16}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \left[\frac{16}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \left[\frac{16}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x-5} = \pm\infty \implies \nexists\, \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$
- `A. Oblicua:` $\exists\, \underset{x\to\pm\infty}{A.O.}$ en $y = x + 3$
  - $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-5x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1$
  - $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{(x-1)^2}{x-5} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-1)^2 - x^2 + 5x}{x-5}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x + 1 - \cancel{x^2} + 5x}{x-5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+1}{x-5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{3}{1} = 3$$

b) $x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = -\dfrac{1}{5} \implies (x_0, y_0) = (0, -1/5)$

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x-5) - (x-1)^2}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+9}{(x-5)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = \frac{9}{25}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y + \frac{1}{5} = \frac{9}{25}\cdot(x-0) \implies \boxed{r \equiv y = \frac{9}{25}x - \frac{1}{5}}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Se considera la función real de variable real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} - x + a & , \text{si } x < 0 \\ -x^3 + 2x^2 & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) *(1.2 puntos) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua.*

b) *(1.3 puntos) Determine el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, eje de abscisas de modo que $x \geq 0$ y $f(x) \geq 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2027 - Opción B)

Solución.

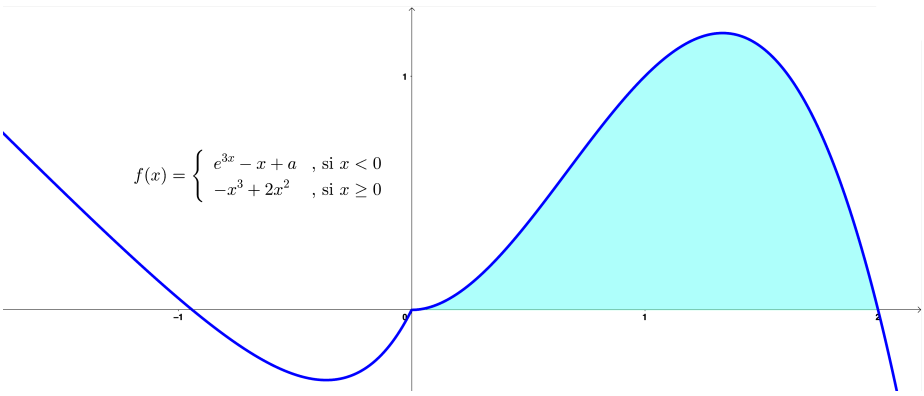
a)
- `Dominio:` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ pues la primera rama es una composición de una función polinómica y una exponencial y la segunda es una función polinómica.
- `Continuidad en` $x = 0$`:`
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(e^{3x} - x + a\right) = 1 + a$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(-x^3 + 2x^2\right) = 0$
  - $f(0) = 0$

  $f(x)$ es continua en $x = 0 \iff \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow 1 + a = 0 \implies \boxed{a = -1}$

b) Para $x \geq 0 \implies f(x) = -x^3 + 2x^2 = x^2 \cdot (-x + 2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$ y hallamos el signo de $f(x)$ para determinar cuándo es $f(x) \geq 0$

	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f(x)$	+	-

$$\text{Área} = \int_0^2 \left(-x^3 + 2x^2\right) dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\Big]_0^2 = \left(-4 + \frac{16}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3} \simeq 1.33 \ u^2$$



HTTPS://APRENDEMOSMIGOMELON.COM

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

En un club de lectura de un municipio de Madrid se sabe que al 30 % de los socios les gustan los libros de novela histórica, mientras que al 50 % de los socios les gustan los libros de ciencia ficción. Además se sabe que la probabilidad de que a un socio le gusten los libros de novela histórica sabiendo que le gustan los libros de ciencia ficción es 0.2.

a) *(1 punto) Calcule la probabilidad de que a un socio no le gusten los libros ni de novela histórica ni de ciencia ficción.*

b) *(1 punto) Calcule la probabilidad de que a un socio le guste la novela histórica, sabiendo que no le gustan los libros de ciencia ficción.*

c) *(0.5 puntos) Justifique razonadamente si los sucesos de gustos de novela histórica y ciencia ficción son independientes y/o incompatibles.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2027 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“Le gustan los libros de novela histórica”}$$
$$F \equiv \text{“Le gustan los libros de ciencia ficción”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(H) = 0.3 \qquad \& \qquad P(F) = 0.5 \qquad \& \qquad P(H \mid F) = 0.2$$

a) $P(H \mid F) = \dfrac{P(H \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(H \cap F)}{0.5} = 0.2 \implies P(H \cap F) = 0.1$

$P(\overline{H} \cap \overline{F}) = P(\overline{H \cup F}) = 1 - P(H \cup F) = 1 - [P(H) + P(F) - P(H \cap F)]$

$= 1 - (0.3 + 0.5 - 0.1) \implies \boxed{P(\overline{H} \cap \overline{F}) = 0.3}$

b) $P(H \cap \overline{F}) = \dfrac{P(H \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(H) - P(H \cap F)}{1 - P(F)} = \dfrac{0.3 - 0.1}{1 - 0.5} \implies \boxed{P(H \cap \overline{F}) = 0.4}$

c) $P(H \cap F) = 0.1 \neq 0 \implies$ los sucesos H y F no son incompatibles

$$\left.\begin{array}{l} P(H \cap F) = 0.1 \\ P(H) \cdot P(F) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15 \end{array}\right\} \implies \left\| \begin{array}{c} P(H \cap F) \neq P(H) \cdot P(F) \\ \implies \text{los sucesos } H \text{ y } F \\ \text{no son independientes} \end{array} \right.$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

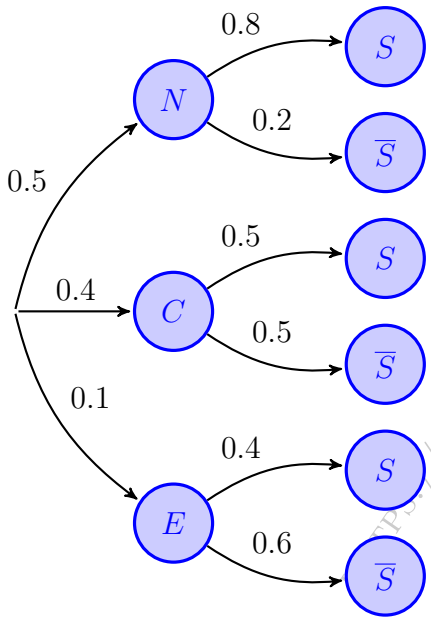
En la plantilla de un equipo de balonmano de la liga Asobal se sabe que el 50 % de los jugadores son nacionales, el 40 % son comunitarios y el 10 % restante extracomunitarios. Se sabe que la probabilidad de que un jugador sea elegido para jugar en su selección nacional es del 80 % si el jugador es nacional, del 50 % si el jugador es comunitario y del 40 % si el jugador es extracomunitario.

a) *(1.3 puntos) Determine la probabilidad de que un jugador del equipo de balonmano resulte seleccionado para jugar en su selección nacional.*

b) *(1.2 puntos) Determine la probabilidad de que, elegido un jugador que no va a ser convocado por su selección nacional, sea nacional.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2027 - Opción B)

Solución.



$N \equiv$ "El jugador es nacional"

$C \equiv$ "El jugador es comunitario"

$E \equiv$ "El jugador es extracomunitario"

$S \equiv$ "El jugador es elegido para su selección"

a) $$\begin{aligned} P(S) &= P\Big((N \cap S) \cup (C \cap S) \cup (E \cap S)\Big) \\ &= P(N \cap S) + P(C \cap S) + P(E \cap S) \\ &= P(N) \cdot P(S \mid N) + P(C) \cdot P(S \mid C) \\ &+ P(E) \cdot P(S \mid E) = 0.5 \cdot 0.8 \\ &+ 0.4 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.64 \end{aligned}$$

b) $$P(N \mid \overline{S}) = \frac{P(N \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(N) \cdot P(\overline{S} \mid N)}{1 - P(S)}$$
$$= \frac{0.5 \cdot 0.2}{1 - 0.64} = 0.2778$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMAIL.COM

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

El número de horas que tarda un jugador en completar todas las fases de un determinado videojuego se comporta según una distribución normal cuya desviación típica es 20 horas.

a) *(1 punto) Con un nivel de confianza del 97 % se ha obtenido el intervalo de confianza* $(116.764; 120.236)$ *para el tiempo medio en superar el juego para una determinada muestra. Determine el tiempo medio empleado por los jugadores de la muestra en completar el videojuego y el tamaño de la muestra utilizada.*

b) *(1.5 puntos) Obtenga el tamaño mínimo de una muestra para que el error del intervalo de confianza sea como mucho 5 horas asumiendo un nivel de confianza del 98.8 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2027 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo en completar un videojuego (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \quad \& \quad 1-\alpha = 0.97 \quad \& \quad I.C._{97\,\%}(\mu) = (116.764; 120.236)$

$1-\alpha = 0.97 \implies \alpha = 0.03 \implies \alpha/2 = 0.015 \implies 1-\alpha/2 = 0.985 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.17$

$$\overline{x} = \frac{116.764 + 120.236}{2} \implies \boxed{\overline{x} = 118.5}$$

$$E = \frac{120.236 - 116.764}{2} = 1.736 \Rightarrow E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} = 1.736 \Rightarrow \boxed{n = 625}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 5 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.988$

$1-\alpha = 0.988 \Rightarrow \alpha = 0.012 \implies \alpha/2 = 0.006 \implies 1-\alpha/2 = 0.994 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.51$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.51 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(2.51 \cdot \frac{20}{5}\right)^2 = 100.8 \implies \boxed{n = 101}$$

———— ○ ————

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

El 90 % de los atletas que se inscriben en una maratón completan la totalidad de sus 42.195 km.

a) *(1 punto) En la última maratón celebrada en Madrid, se tomó una muestra de 100 atletas de los cuales, 85 terminaron la maratón. Obtenga un intervalo de confianza al 98.4 % de confianza para la proporción de atletas que terminan la carrera.*

b) *(1.5 puntos) Se sabe que en la próxima maratón de la temporada hay 400 atletas inscritos. Obtenga la probabilidad de que terminen la carrera a lo sumo 352 atletas.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2027 - Opción B)

Solución.

a) $n = 100 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{85}{100} = 0.85 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.15 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.98.4$

$1 - \alpha = 0.984 \Rightarrow \alpha = 0.016 \implies \alpha/2 = 0.008 \implies 1 - \alpha/2 = 0.992 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.41$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.41 \cdot \sqrt{\frac{0.85 \cdot 0.15}{100}} = 0.0861$$

$$I.C._{98.4\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{98.4\,\%}(p) = (0.7639; 0.9361)}$$

b) $X \equiv$ "Nº de corredores que terminan la maratón de entre 400" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(400, 0.9)$

$$X : \mathcal{B}(400, 0.9) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 400 > 20 \checkmark \\ np = 360 > 5 \checkmark \\ nq = 40 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(360, 6)$$

$$P(X \leq 352) = P(Y \leq 352.5) = P\left(Z \leq \frac{352.5 - 360}{6}\right) = P(Z \leq -1.25)$$

$$= P(Z \geq 1.25) = 1 - [P(Z \leq 1.25)] = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

HTTPS://APRENDECONMIGOFELON.COM