

# MATEMATICAS II

## EXAMENES RESUELTOS



# EVAU JULIO 2026

## - Extraordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio





# Julio 2026 (Extraorrdinario)

## Ejercicio 1A (2.5 puntos)

Considera las matrices presentadas a continuación,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde el parámetro  $a \in \mathbb{R}$ . Responde a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) Halla los valores del parámetro  $a$  para los que  $A$  tiene inversa.

b) (1.5 puntos) Considera  $a = 0$ , calcula la matriz  $X$  que cumple:

$$A \cdot X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción A)

### Solución.

$$\text{a) } |A| = a^2 + 4a + 3 = 0 \implies a = \{-3, -1\} \implies \exists A^{-1} \forall a \neq \{-3, -1\}$$

$$\text{b) Para } a = 0 \quad \& \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 3 \quad \& \quad \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^T \implies A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ -2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 37 & 15 \\ -7 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 37/6 & 5/2 \\ -7/6 & -1/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 1B (2.5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^3x + y + az = 1 \\ ax + a^2y = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ . Responde a las siguientes cuestiones:

- a) (1.5 puntos) Discute el sistema en función de los valores de  $a$ .
- b) (0.5 puntos) Considera  $a = 0$ . Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- c) (0.5 puntos) Considera  $a = 2$ . Si el sistema es compatible, halla su solución general.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción B)

### Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} a^3 & 1 & a & 1 \\ a & a^2 & 0 & a \end{array} \right) \xrightarrow{a \neq 0} \left[ \begin{array}{cc} F_1 & \\ a^2 F_2 - F_1 & \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} a^3 & 1 & a & 1 \\ 0 & a^4 - 1 & -a & a^3 - 1 \end{array} \right) \\ \Rightarrow a^3 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

- Si  $a = 0$   $A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$  SIST. COMP. INDET. ( $\infty$  Sol.)
- Si  $a = 1$   $A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$  SIST. COMP. INDET. ( $\infty$  Sol.)
- Si  $a \neq \{0, 1\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} a^3 & 1 & a & 1 \\ 0 & \square & \square & \square \end{array} \right) \Rightarrow$  SIST. COMP. INDET. ( $\infty$  Sol.)

En definitiva el sistema es Compatible Indeterminado  $\forall a \in \mathbb{R}$

b) Resolvemos el sistema para  $a = 0$  por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I.

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} y = 1 \\ x = \lambda \\ z = \mu \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \mu \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

c) Resolvemos el sistema para  $a = 2$  por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I.

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & -2 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} 8x + \frac{7+2\lambda}{15} + 2\lambda = 1 \\ 15y - 2\lambda = 7 \Rightarrow z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1-4\lambda}{15} \\ y = \frac{7+2\lambda}{15} \\ z = \lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

## Ejercicio 2A (2.5 puntos)

Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a^2 & , \text{ si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} + 4a & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ . Responde a las siguientes cuestiones:

- a) (0.75 puntos) Calcula los valores de  $a$  para los cuales  $f(x)$  es continua en todo su dominio.
- b) (0.75 puntos) Calcula las asíntotas de  $f(x)$ , en función de  $a$ .
- c) (1 punto) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción A)

### Solución.

- a) ■ Si  $a \neq 1$  la función  $f(x)$  es continua pues la primera rama es un polinomio y en la segunda hay una fracción cuyo denominador no se anula y un logaritmo cuyo argumento es positivo.

- Si  $a = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3x + a^2) = 4 + a^2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln x}{x} + 4a \right) = 4a$
- $f(1) = \frac{0}{1} + 4a = 4a$

$$f(x) \text{ es continua en } x = 1 \iff \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow 4 + a^2 = 4a \implies \boxed{a = 2}$$

- b) La primera rama no tiene asíntotas porque es un polinomio. En la segunda rama:

- A. Vertical:  $\text{Dom}(f_2) = [1, +\infty) \implies \nexists A.V.$

- A. Horizontal:  $\exists A.H.$  en  $y = 4a$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} + 4a \right) = 4a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1/x}{1} + 4a \right) = 4a$$

c)  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3/2 & , \text{ si } x < 1 \\ \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

|               | $(-\infty, -3/2)$         | $(-3/2, 1)$             | $(1, e)$                | $(e, +\infty)$            |
|---------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|
| Signo $f'(x)$ | —                         | +                       | +                       | —                         |
| $f(x)$        | Decreciente<br>$\searrow$ | Creciente<br>$\nearrow$ | Creciente<br>$\nearrow$ | Decreciente<br>$\searrow$ |

$f(x)$  es *creciente* en  $(-3/2, 1) \cup (1, e)$  y *decreciente* en  $(-\infty, -3/2) \cup (e, +\infty)$ .

— o —

### Ejercicio 2B (2.5 puntos)

Considera la siguiente función real:

$$f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{x}}$$

y responde a las siguientes cuestiones:

- a) (0.5 puntos) Determina el dominio de definición de  $f(x)$ .
- b) (1.25 puntos) Calcula una primitiva de  $f(x)$ , que se haga nula en  $x = 0$ .
- c) (0.75 puntos) Calcula el valor de  $x$  para el cual  $f(x)$  alcanza el valor máximo en  $(1, \infty)$ .

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción B)

### Solución.

a)  $\text{Dom}(f) = \{1 - \sqrt{x} \neq 0 \cap x \geq 0\} = \{x \neq 1 \cap x \geq 0\} \Rightarrow \text{Dom}(f) = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

b) 
$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{1 - \sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{1 - t} \cdot 2t dt$$
$$= \int \frac{2t^3}{1 - t} dt \stackrel{\odot}{=} \int \left( -2t^2 - 2t - 2 + \frac{2}{1 - t} \right) dt = -\frac{2}{3}t^3 - t^2 - 2t - 2 \cdot \ln |1 - t| + C$$
$$= -\frac{2x\sqrt{x}}{3} - x - 2\sqrt{x} - 2 \cdot \ln |1 - \sqrt{x}| + C$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = -\frac{2x\sqrt{x}}{3} - x - 2\sqrt{x} - 2 \cdot \ln |1 - \sqrt{x}|$$

$$\odot \quad \begin{array}{r} 2t^3 \\ - 2t^3 + 2t^2 \\ \hline 2t^2 \\ - 2t^2 + 2t \\ \hline 2t \\ - 2t + 2 \\ \hline 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} -t + 1 \\ - 2t^2 - 2t - 2 \end{array} \right|$$

c) 
$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{x}}{2}}{(1 - \sqrt{x})^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \Rightarrow x = 4$$

|               |                         |                           |
|---------------|-------------------------|---------------------------|
|               | $(1, 4)$                | $(4, +\infty)$            |
| Signo $f'(x)$ | +                       | -                         |
| $f(x)$        | Creciente<br>$\nearrow$ | Decreciente<br>$\searrow$ |

- d) La función  $f(x)$  es *creciente* en  $(1, 4)$  y *decreciente* en  $(4, +\infty)$ , y tiene un *máximo relativo* en  $(4, -4)$ .

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Considera los puntos  $A(0, 5, -1)$  y  $B(-3, 11, -10)$ , y la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{3}$$

- a) (0.5 puntos) Estudia la posición relativa de  $r$  y la recta que contiene a  $A$  y  $B$ .
- b) (1 punto) Calcula el área del triángulo formado por los vértices  $A$ ,  $B$  y un punto genérico de  $r$ .
- c) (1 punto) Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a  $r$  y  $A$ .

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción Única)

**Solución.**

$$r \equiv \begin{cases} R(3, -2, 0) \\ \vec{d}_r = (1, -2, 3) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{a) } s \equiv \begin{cases} A(0, 5, -1) \\ \vec{d}_s = \overrightarrow{AB} = (-3, 6, -9) \approx (1, -2, 3) \end{cases}$$

$$\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s \xrightarrow{A \in r?} \frac{-3}{1} \neq \frac{5+2}{-2} \neq \frac{-1}{3} \implies A \notin r \implies r \parallel s$$

b) Sea  $R(3 + \lambda, -2 - 2\lambda, 3\lambda)$  un punto genérico de  $r$

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\triangle ABR} &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & -9 \\ 3 + \lambda & -7 - 2\lambda & 1 + 3\lambda \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |(-57, -24, 3)| \\ &= \frac{3\sqrt{426}}{2} \simeq 30.96 \, u^2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \pi \equiv \begin{cases} A(0, 5, -1) \\ \vec{d}_r = (1, -2, 3) \\ \overrightarrow{AR} = (3 + \lambda, -7 - 2\lambda, 1 + 3\lambda) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y - 5 & z + 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 + \lambda & -7 - 2\lambda & 1 + 3\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv 19x + 8y - z - 41 = 0}$$

### Ejercicio 4A (2.5 puntos)

Tenemos 3 cajas (caja A, caja B y caja C) y bolas rojas o blancas. La caja A contiene 10 bolas, de las cuales 4 son blancas. La caja B contiene 6 bolas, de las cuales solo una es blanca. La caja C contiene 3 bolas blancas en un total de 8 bolas.

- a) (0.5 puntos) Calcula la probabilidad de que, al sacar al azar una bola de cualquiera de las cajas, esta sea blanca.
- b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una bola blanca, pertenezca a la caja B.
- c) (1 punto) Calcula la probabilidad de que, sacando al azar dos bolas de las cajas A o B, se obtengan dos bolas blancas.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción A)

### Solución.

Sean los sucesos:

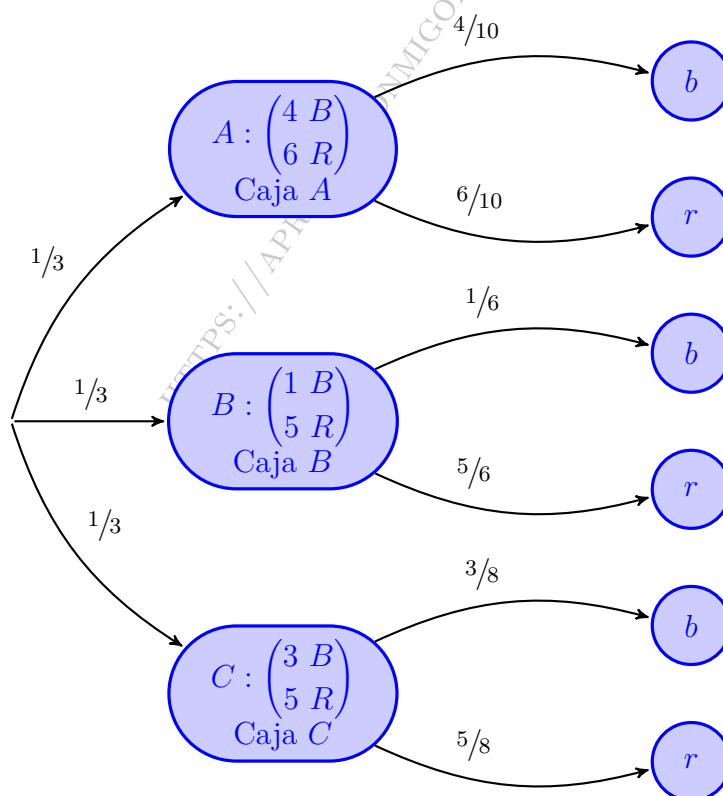
$A \equiv$  "Se extrae de la caja A"

$B \equiv$  "Se extrae de la caja B"

$C \equiv$  "Se extrae de la caja C"

$b \equiv$  "La bola extraída es blanca"

$r \equiv$  "La bola extraída es roja"



$$\begin{aligned} \text{a) } P(b) &= P((A \cap b) \cup (B \cap b) \cup (C \cap b)) = P(A \cap b) + P(B \cap b) + P(C \cap b) \\ &= P(A) \cdot P(b | A) + P(B) \cdot P(b | B) + P(C) \cdot P(b | C) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360} \simeq 0.3139 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(B | b) = \frac{P(B \cap b)}{P(b)} = \frac{P(B) \cdot P(b | B)}{P(b)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{113}{360}} = \frac{20}{113} \simeq 0.177$$

- c) En este caso tenemos solo dos urnas  $A$  y  $B$ , con  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

Sacaremos dos bolas blancas si las dos son de la caja  $A$  (en la  $B$  solo hay una), si una es de  $A$  y otra de  $B$  y viceversa, todo ello sin reemplazamiento.

$$P(b_1 \cap A) \cdot P(b_2 \cap A) + P(b_1 \cap A) \cdot P(b_2 \cap B) + P(b_1 \cap B) \cdot P(b_2 \cap A) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{15} \simeq 0.0667$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

#### Ejercicio 4B (2.5 puntos)

La venta de pizzas a la semana de un establecimiento sigue una distribución normal, con una media de 300 pizzas y una desviación típica de 62 pizzas.

- a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar el establecimiento venda más de 370 pizzas.
- b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que, escogiendo una semana al azar, el establecimiento venda entre 200 y 350 pizzas.
- c) (0.5 puntos) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar dos semanas, se vendan, al menos, 150 pizzas en cada una de ellas.

(Cantabria - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción B)

#### Solución.

$X \equiv$  "Nº de pizzas vendidas en la semana (ud.)"  $\rightarrow X : \mathcal{N}(300, 62)$

$$\text{a) } P(X \geq 370) = P\left(Z \geq \frac{370 - 300}{62}\right) = P(Z \geq 1.13) = 1 - P(Z \leq 1.13) \\ = 1 - 0.8708 = 0.1292$$

$$\text{b) } P(200 \leq X \leq 350) = P\left(\frac{200 - 300}{62} \leq Z \leq \frac{350 - 300}{62}\right) = P(-1.61 \leq Z \leq 0.81) \\ = P(Z \leq 0.81) - P(Z \leq -1.61) = P(Z \leq 0.81) - P(Z \geq 1.61) \\ = P(Z \leq 0.81) - (1 - P(Z \leq 1.61)) = 0.7910 - (1 - 0.9463) \\ = 0.7373$$

$$\text{c) } p = P(X \geq 150) = P\left(Z \geq \frac{150 - 300}{62}\right) = P(Z \geq -2.42) = P(Z \leq 2.42) = 0.9922$$

$$P(\text{"Más de 150 es dos semanas"}) = p \cdot p = 0.9922^2 = 0.9845$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_