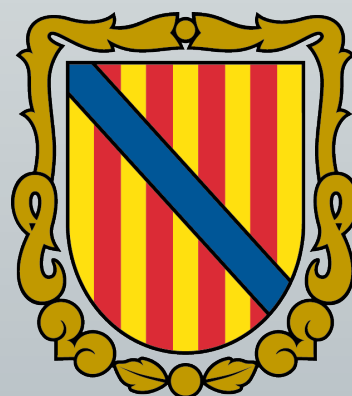


MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2026

- Extraordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Ejercicio 1 (2 puntos)

En un estudio de astronomía, se modeliza una constelación artificial formada por satélites que orbitan alrededor de la Tierra. Considerando nuestro sistema de coordenadas con origen en el centro de la Tierra (donde las unidades representan decenas de miles de kilómetros), se sitúan 5 satélites, A , B , C , D y E , con coordenadas

$$A(1, 2, 3) \quad B(3, 2, 1) \quad C(5, 4, 3) \quad D(2, 1, 1) \quad E(4, 3, 1)$$

Se dice que distintos satélites forman un plano orbital si estos, junto con el centro de la Tierra, son coplanarios.

- a) (1 punto) Determina si los satélites A , B y C forman un plano orbital.
- b) (1 punto) Proporciona un punto F (distinto del origen) donde se podría colocar un sexto satélite para asegurar que los satélites D , E y F forman otro plano orbital.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción Única - Extraordinario)

Solución.

- a) Llamamos $O(0, 0, 0)$ al centro de la Tierra y comprobamos si ésta y los satélites A , B y C son coplanarios:

$$[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies A, B \text{ y } C \text{ son coplanarios, luego forman un plano orbital.}$$

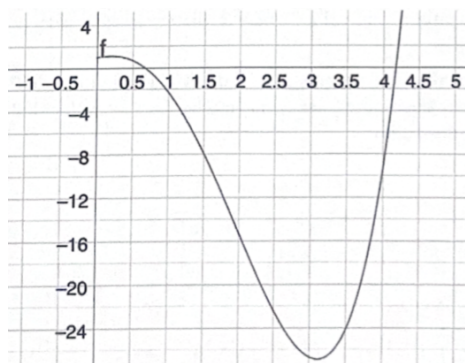
- b) Hallamos el plano π que contiene a la Tierra y a los satélites D y E y elegimos un punto F de dicho plano distinto a O :

$$\pi \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{OD} = (2, 1, 1) \\ \vec{OE} = (4, 3, 1) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi \equiv x - y - z = 0 \implies \boxed{E(1, 1, 0)}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ que tiene la siguiente representación gráfica:



a) (1 punto) Calcula los límites de la función en los extremos de su dominio.

b) (1 punto) Calcula el área comprendida entre $f(x)$, $y = -1$, $x = 2$ y $x = 4$.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción Única - Extraordinario)

Solución.

a) Entendiendo que $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x) = 1 \\ \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty \end{aligned}$$

b) En el intervalo $(2, 4)$ las funciones $f(x)$ y $g(x) = -1$ no se cortan en ningún punto (trazar la línea sobre el dibujo), por lo que entre las rectas $x = 2$ y $x = 4$ se define un único recinto de integración $A_1 : (2, 4)$ en donde la función $g(x)$ está por encima de $f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^4 [g(x) - f(x)] dx = \int_2^4 \left(-1 - \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_2^4 \left[-1 - (x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x) \right] dx = -x - \frac{2}{9}x^{9/2} + 6 \cdot \frac{2}{7}x^{7/2} - e^x \Big|_2^4 \\ &= \left(-4 - \frac{2^{10}}{9} + \frac{3 \cdot 2^9}{7} - e^4 \right) - \left(-2 - \frac{2^5 \sqrt{2}}{9} + \frac{3 \cdot 2^5 \sqrt{2}}{7} - e^2 \right) \\ &= -\frac{640\sqrt{2}}{63} + \frac{6530}{63} - e^4 + e^2 \simeq 42.07 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

_____ o _____

Ejercicio 3 (2 puntos)

En un instituto de 60 alumnos se ha realizado un estudio sobre la práctica del baloncesto entre el alumnado. Los datos recogidos indican que el 60 % de ellos juega al baloncesto, el 35 % forma parte de un equipo federado y el 25 % juega al baloncesto y está federado.

- a) (1 punto) ¿Hay algún alumno que esté federado, pero no juegue al baloncesto? En caso afirmativo, ¿cuántos?
- b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno forme parte de un equipo federado sabiendo que juega al baloncesto?

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción Única - Extraordinario)

Solución.

Hacemos una tabla de contingencia para la resolución del ejercicio, con los datos (en negro) y la completamos (en azul):

	F	$\bar{F}$	Total
B	0.25	0.35	0.6
$\bar{B}$	0.1	0.3	0.4
Total	0.35	0.65	1

Sean los sucesos:

$B \equiv$ "El alumno juega al baloncesto"

$F \equiv$ "El alumno está federado"

a) $P(F \cap \bar{B}) = 0.1 \xrightarrow{\times 60} 6$ jugadores

b) $P(F | B) = \frac{0.25}{0.6} \simeq 0.4167$

Ejercicio 4A (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 2}$,

- a) (1.25 puntos) Demuestra que $f(x)$ tiene al menos un punto crítico en cada uno de los siguientes intervalos: $(-3, -2.5)$, $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.
- b) (0.75 puntos) Demuestra que $f(x)$ tiene exactamente 3 puntos críticos, uno en cada intervalo del apartado anterior, indica si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) $f'(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 1}{(x + 2)^2} \implies x + 2 = 0 \implies x = -2 \implies \text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{-2\}$

- $f'(x)$ es continua en el intervalo $[-3, -2.5]$ y cumple que $f'(-3) = -1 < 0$ y $f'(-2.5) = 21 > 0 \xrightarrow[\text{Bolzano}]{\text{Teorema de Bolzano}} \exists c_1 \in (-3, -2.5) \mid f'(c_1) = 0$
- $f'(x)$ es continua en el intervalo $[-1, 0]$ y cumple que $f'(-1) = 3 > 0$ y $f'(0) = -1/4 < 0 \xrightarrow[\text{Bolzano}]{\text{Teorema de Bolzano}} \exists c_2 \in (-1, 0) \mid f'(c_2) = 0$
- $f'(x)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ y cumple que $f'(0) = -1/4 < 0$ y $f'(1) = 7/9 > 0 \xrightarrow[\text{Bolzano}]{\text{Teorema de Bolzano}} \exists c_3 \in (0, 1) \mid f'(c_3) = 0$

- b) $f'(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 1}{(x + 2)^2} = 0 \implies 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$. Por el *Teorema fundamental del álgebra* "Todo polinomio de una variable de grado n con coeficientes en $\mathbb{R}$ tiene exactamente n raíces (aunque no todas tienen que ser reales)". Como ya hemos encontrado 3 intervalos distintos en donde hay una raíz de $f'(x)$, entonces esas son las 3 raíces de $f'(x)$, es decir los 3 puntos críticos de $f(x)$.
Mirando el signo de $f'(x)$ en los extremos de cada intervalo vemos que en el primero y tercero de ellos se trata de *mínimos*, mientras que en el segundo hay un *máximo*.

_____ o _____

Ejercicio 4B (2 puntos)

Un equipo de investigadores estudia la distancia recorrida por un delfín desde el punto en el que ha sido liberado dentro de una reserva marina. La distancia recorrida al cabo de t segundos viene dada por la función

$$d(t) = 140 \cdot (1 - e^{-0.05t}),$$

donde $t \geq 0$ y $d(t)$ es la distancia recorrida en metros. Sea $d'(t)$ la velocidad, en m/s, en el instante t .

- a) (0.5 puntos) Calcula a qué valor tiende la distancia recorrida por el delfín a lo largo del tiempo.
- b) (1.5 puntos) Estudia el comportamiento de la velocidad del delfín, indicando en qué momentos aumenta o disminuye, así como cuáles son las velocidades mínima y la máxima observadas en este estudio.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 140 \cdot (1 - e^{-0.05t}) = 140$ metros.

b) $v(t) = d'(t) = 7e^{-0.05t} \implies v'(t) = -0.35e^{-0.05t} < 0 \forall t \in \mathbb{R}^+ \implies$ la velocidad del delfín es decreciente, siendo por tanto su *máximo* en $v(0) = 7$ m/s y su *mínimo*, aunque no existe, se aproximaría a $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(t) = 0$

_____ o _____

Ejercicio 5A (2 puntos)

Sean A , B , C y D cuatro matrices de dimensiones 2×3 , 1×3 , 2×3 y 2×3 , respectivamente. Indica, justificadamente, si se pueden realizar las siguientes operaciones:

a) $A \cdot C$

b) $D^{-1} \cdot A$

c) $B \cdot (A + C)^\top$

donde el superíndice $^\top$ indica la matriz transpuesta y el superíndice $^{-1}$ indica la matriz inversa.

En caso afirmativo, indica la dimensión de la matriz resultante.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) $\underbrace{A}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{C}_{2 \times 3} \Rightarrow$ no se puede realizar la operación.

b) $D^{-1} \cdot A \Rightarrow$ no se puede operar ya que D no es cuadrada y por tanto $\nexists D^{-1}$.

c) $\underbrace{B}_{1 \times 3} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{A}_{2 \times 3} + \underbrace{C}_{2 \times 3} \right)^\top}_{2 \times 3} \Rightarrow B \cdot (A + C)^\top \in \mathcal{M}_{1 \times 2}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1 \times 2}$

Ejercicio 5B (2 puntos)

Queremos determinar el coste por hora de tres servicios que ofrece una empresa de alquiler audiovisual. Estos servicios son: iluminación profesional, con un coste de x €/hora, equipo de sonido, con un coste de y €/hora y cámaras de grabación, con un coste de z €/hora. Se han registrado los gastos totales asociados a tres eventos diferentes:

$$\text{Evento 1: } 2x + y + z = 6500$$

$$\text{Evento 2: } 4x + 5y + 7z = 22500$$

$$\text{Evento 3: } x + 2y + 3z = 8000$$

Justifica si, con la información proporcionada, se pueden determinar de manera única los costes de los tres servicios.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial y resolvemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 6500 \\ 4 & 5 & 7 & | & 22500 \\ 1 & 2 & 3 & | & 8000 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 6500 \\ 0 & 3 & 5 & | & 9500 \\ 0 & 3 & 5 & | & 9500 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 6500 \\ 0 & 3 & 5 & | & 9500 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO con infinitas soluciones y por tanto no es posible determinar de manera única los costes de los tres servicios.

————— o —————