

MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2026

- Extraordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Julio 2026 (Extraordinario)

Ejercicio 1A (2.5 puntos)

Una empresa de logística transporta mercancía utilizando camiones pequeños, medianos y grandes. Para el transporte de toda la mercancía se utilizan un total de 10 camiones. Cada camión pequeño transporta 1 tonelada de mercancía, cada mediano 2 toneladas y cada grande 3 toneladas. La carga total que ha de transportarse es de $(m + 9)$ toneladas con $m \in \mathbb{R}$. El transporte de la mercancía tiene un coste asociado de dos unidades por cada camión pequeño, de 3 unidades por cada camión mediano y de $7 - m$ unidades por cada camión grande. El coste total del transporte es de 22 unidades.

- (0.75 puntos) Plantea el sistema de ecuaciones lineales que modeliza la situación.
- (1 punto) Determina un valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo.
- (0.75 puntos) Resuelve el sistema para $m = 1$. ¿Tiene sentido esta solución para el problema dado?

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción A - Extraordinario)

Solución.

- Sean las incógnitas: $x \equiv$ "Nº de camiones pequeños"
 $y \equiv$ "Nº de camiones medianos"
 $z \equiv$ "Nº de camiones grandes" Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = m + 9 \\ 2x + 3y + (7 - m)z = 22 \end{cases}$$

- Escribimos el sistema en forma matricial y resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 1 & 2 & 3 & | & m+9 \\ 2 & 3 & 7-m & | & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 1 & 2 & | & m-1 \\ 0 & 1 & 5-m & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 1 & 2 & | & m-1 \\ 0 & 0 & 3-m & | & 3-m \end{pmatrix} \Rightarrow 3-m=0 \Rightarrow m=3$$

$$\blacksquare \text{ Si } m=3 \xrightarrow{S.C.I.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 - 2\lambda + \lambda = 10 \\ y + 2\lambda = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) Si } m=1 \Rightarrow A/A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 + 1 = 10 \\ y + 2 = 0 \\ 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 > 10 \\ y = -2 < 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

La solución no tiene sentido pues implica un número de camiones medianos negativo.

_____ o _____

Ejercicio 1B (2.5 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (0.75 puntos) Determina si la matriz A es invertible. En caso afirmativo calcula A^{-1} .

b) (1.75 puntos) Resuelve la ecuación $AX + B - C = 0$.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$\text{a) } |A| = -1 \neq 0 \implies \exists A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$\text{b) } AX + B - C = 0 \implies AX = C - B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$$

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot (C - B) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -4 \\ -7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

_____ o _____

Ejercicio 2A (2.5 puntos)

Un parque acuático está diseñando un nuevo tobogán curvo que debe ser a la vez rápido y seguro. Para ello, se ha modelado la altura del tobogán sobre el suelo mediante la función, $h(x) = 12 - 0.4x^2 + 0.03x^3$, donde x es la distancia horizontal en metros desde el inicio del tobogán y $h(x)$ es la altura sobre el suelo en metros. Se necesita estudiar cómo cambiar la inclinación y la forma del tobogán para asegurarse de que no haya tramos peligrosamente verticales ni zonas demasiado planas.

- (0.75 puntos) Calcula la derivada $h'(x)$ e interpreta el significado de $h'(x)$ dentro del contexto del diseño del tobogán.
- (0.75 puntos) Se considera potencialmente peligroso todo punto donde la pendiente sea menor que -2 (demasiada inclinación descendente). Calcula, en caso de existir, los puntos en los que $h'(x) = -2$.
- (1 punto) Determina los valores de x en los que la función $h(x)$ alcanza un mínimo local.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) $h'(x) = -0.8x + 0.09x^2 = -x \cdot (0.8 - 0.09x)$

La derivada $h'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva. De esta forma podemos ver la peligrosidad del tobogán estudiando $h'(x)$.

b) $h'(x) = -0.8x + 0.09x^2 = -2 \Rightarrow 9x^2 - 80x + 200 = 0 \Rightarrow \nexists$ Ptos con pdte igual a -2

c) $h'(x) = -x \cdot (0.8 - 0.09x) = 0 \Rightarrow x = \{0, 8.88\}$

	$(0, 8.88)$	$(8.88, +\infty)$
Signo $h'(x)$	$-$	$+$
$h(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

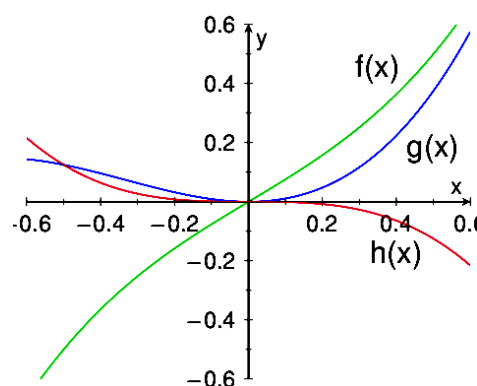
La altura $h(x)$ es *decreciente* en $(0, 8.88)$ y *creciente* en $(8.88, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(8.88, 1.465)$.

_____ o _____

Ejercicio 2B (2.5 puntos)

Dadas las siguientes funciones:

- a) (1 punto) Dado $p(x) = x^2 + x^3$ identifica razonadamente sin evaluar p qué función lo representa.
- b) (1.5 puntos) Indica razonadamente cuál es el valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)}$.



(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción B - Extraordinario)

Solución.

- a) I) $p(x) = x^2 + x^3 = x^2 \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow x = \{-1, 0\}$ Corte OX en $x = -1$ y $x = 0$
II) $p'(x) = 2x + 3x^2 = x \cdot (2 + 3x) = 0 \Rightarrow x = \{0, -\frac{2}{3}\}$ Pto crítico $x = 0$ y $x = -\frac{2}{3}$
III) $p''(x) = 2 + 6x = 0 \Rightarrow x = -1/3$ Pto de Inflexión en $x = -1/3$

La función $f(x)$ no puede ser por II), mientras que $h(x)$ no puede ser por III), luego la solución es que la gráfica de $p(x)$ es $g(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h'(x)}{f'(x)} = \frac{0}{>0} = 0$

_____ o _____

Ejercicio 3A (2.5 puntos)

Una tenista profesional quiere analizar la calidad de su saque. Para ello, los entrenadores han colocado sensores que miden la velocidad instantánea de la pelota desde que abandona la raqueta. En el momento en que la pelota sale de la raqueta, su velocidad inicial es de $v_0 = 54 \text{ m/s}$ y la desaceleración media registrada durante su trayectoria es de $a = -22 \text{ m/s}^2$. Para estudiar el desplazamiento de la pelota, se empleará la función velocidad $v(t) = v_0 + at$. La distancia recorrida desde el instante del golpe se obtiene integrando esta función. Teniendo en cuenta que la longitud máxima disponible para que la pelota bote en campo contrario durante un saque reglamentario es de 20.06 m .

- a) (1.25 puntos) Utiliza una integral definida para calcular la distancia que recorre la pelota durante el primer segundo del vuelo.
- b) (1.25 puntos) Plantea y resuelve la ecuación necesaria para determinar cuánto tiempo tarda la pelota en recorrer 20.06 m .

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción A - Extraordinario)

Solución.

- a) La distancia recorrida durante los primeros x segundos será:

$$d(x) = \int_0^x v(t) dt = \int_0^x (v_0 + at) dt = \int_0^x (54 - 22t) dt = 54t - 11t^2 \Big|_0^x$$

$$= 54x - 11x^2 \text{ m}$$

$$d(1) = 54 - 11 = 43 \text{ m}$$

- b) $d(x) = 54x - 11x^2 = 20.06 \implies 11x^2 - 54x + 20.06 = 0 \implies x = \{0.4048, 4.5042\}$.
La pelota se para en $v = v_0 + at = 54 - 22t = 0 \implies t = 2.4554 \text{ s}$, lo que implica que la segunda solución no tiene sentido y por tanto la pelota tardará 0.4048 segundos en alcanzar los 20.06 metros.

_____ o _____

Ejercicio 3B (2.5 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$.

- a) (1.5 puntos) Calcula todas las primitivas de la función $f(x)$. ¿Cuál de todas ellas pasa por el origen de coordenadas?
- b) (1 punto) Calcula el área encerrada entre las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ entre sus puntos de corte.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x-1}{2x+1} dx \stackrel{\odot}{=} \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{-3/2}{2x+1} dx = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \cdot \ln|2x+1| + C \end{aligned}$$

$$\odot \quad \begin{array}{r|l} x-1 & 2x+1 \\ -x-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & -\frac{3}{2} \end{array}$$

Pasa por $(0,0)$: $F(0) = 0 \implies 0 - \frac{3}{4} \cdot \ln 1 + C = 0 \implies C = 0$

Luego la primitiva que pasa por el origen será: $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \cdot \ln|2x+1|$

- b) $g(x) \cap h(x) \implies x^2 = x^3 \implies x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x-1) = 0 \implies x = \{0, 1\}$, lo que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 [g(x) - h(x)] dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - 0 = \frac{1}{12}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{1}{12} \simeq 0,0833 \text{ u}^2$$

_____ o _____

Ejercicio 4A (2.5 puntos)

Dado el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$:

- a) (0.75 puntos) Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π cuya distancia al origen sea 2. ¿Existe más de un plano que cumpla estas condiciones?
- b) (1 punto) Calcula el punto P del plano π que está más próximo al origen O .
- c) (0.75 puntos) Calcula el área del paralelogramo formado por los segmentos OP y OQ donde $Q(3, 3, 3)$.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) $\pi' \parallel \pi \implies \pi' \equiv 2x + 2y + z + D = 0$

$$d(O, \pi') = \frac{|0 + 0 + 0 + D|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|D|}{3} = 2 \implies |D| = 6 \implies D = \pm 6$$

$$\implies \pi'_1 \equiv 2x + 2y + z - 6 = 0 \quad \& \quad \pi'_2 \equiv 2x + 2y + z + 6 = 0$$

- b) El punto $P \in \pi$ más próximo a O es la proyección ortogonal de O sobre π .

$$r \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (2, 2, 1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P = r \cap \pi \implies 2 \cdot 2\lambda + 2 \cdot 2\lambda + \lambda = 5 \implies \lambda = \frac{5}{9} \implies P\left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

c) Área = $|\vec{OP} \times \vec{OQ}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10/9 & 10/9 & 5/9 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \right| = |(5/3, -5/3, 0)| = \frac{5\sqrt{2}}{3} u^2$

Ejercicio 4B (2.5 puntos)

Para estudiar la cobertura de comunicaciones en una zona montañosa se utilizan tres antenas situadas en los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(3, 0, 2)$ y $C(2, 3, 3)$ que determinan el plano del terreno en dicha zona. Un dron de mantenimiento se desplaza siguiendo la trayectoria rectilínea,

$$r \equiv (x, y, z) = (0, 1, 4) + t \cdot (1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) (1 punto) Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C .
- b) (0.75 puntos) Estudia la posición relativa de la trayectoria del dron respecto del plano determinado por las tres antenas. En caso de que se corten, calcula el punto de corte.
- c) (0.75 puntos) Calcula la distancia mínima entre la trayectoria del dron y el punto A .

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$\text{a) } \pi \equiv \begin{cases} A(1, 2, 1) \\ \vec{AB} = (2, -2, 1) \\ \vec{AC} = (1, 1, 2) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -5 \cdot (x-1) - 3 \cdot (y-2) + 4 \cdot (z-1) = 0 \implies \boxed{\pi \equiv 5x + 3y - 4z - 7 = 0}$$

$$\text{b) } r \equiv \begin{cases} R(0, 1, 4) \\ \vec{d}_r = (1, 1, -1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1, 1, -1) \cdot (5, 3, -4) = 12 \neq 0 \implies \vec{d}_r \not\perp \vec{n}_\pi \implies r \not\parallel \pi \implies r \text{ y } \pi \text{ se cortan}$$

$$P = r \cap \pi \implies 5 \cdot t + 3 \cdot (1+t) - 4 \cdot (4-t) - 7 = 0 \implies t = \frac{5}{3} \implies \boxed{P = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

$$\text{c) } d(A, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{AR}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|(2, -2, 0)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} u$$

_____ o _____

Ejercicio 5A (2.5 puntos)

Una jugadora de tenis de mesa comienza los partidos restando en el 75 % de las ocasiones. Cuando comienza restando, la jugadora vence el 80 % de los partidos. Sin embargo, cuando comienza sacando, ese porcentaje se reduce hasta el 65 % de victorias.

- a) (1.25 puntos) Calcula la probabilidad de que la jugadora gane un partido si no sabemos si ha comenzado restando o no.
- b) (1.25 puntos) Calcula la probabilidad de que la jugadora haya empezado restando en un partido sabiendo que ha ganado.

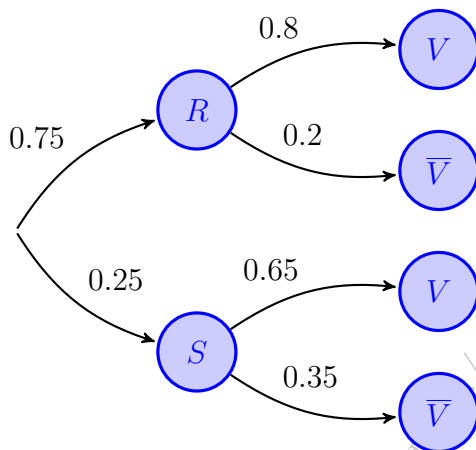
(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción A - Extraordinario)

Solución.

Sean los sucesos:

$R \equiv$ “La jugadora comienza restando” $S \equiv$ “La jugadora comienza sacando”

$V \equiv$ “La jugadora vence el partido”



$$\begin{aligned} \text{a) } P(V) &= P((R \cap V) \cup (S \cap V)) \\ &= P(R \cap V) + P(S \cap V) \\ &= P(R) \cdot P(V | R) + P(S) \cdot P(V | S) \\ &= 0.75 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.65 = 0.7625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(R | V) &= \frac{P(R \cap V)}{P(V)} = \frac{P(R) \cdot P(V | R)}{P(V)} \\ &= \frac{0.75 \cdot 0.8}{0.7625} = 0.7869 \end{aligned}$$

Ejercicio 5B (2.5 puntos)

Los niveles de ácido úrico en sangre de una población de hombres adultos sigue una distribución normal de media 5.5 mg/dl y desviación típica de 0.9 mg/dl.

- a) (1.25 puntos) Calcula la probabilidad de que un hombre adulto de la población tenga unos niveles de ácido úrico entre 4.3 mg/dl y 6.1 mg/dl.
- b) (1.25 puntos) Calcula el nivel de ácido úrico en sangre que solo superan el 1.5 % de los hombres adultos de la población.

Algunos valores de la función de distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ son:

$$F(x) = P(Z \leq x) \quad F(0) = 0.5 \quad F(0.015) = 0.5060 \quad F(0.8413) = 0.7999 \\ F(0.985) = 0.8377 \quad F(1) = 0.8413 \quad F(2.17) = 0.985$$

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2026 Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$X \equiv \text{"Nivel de ácido úrico (mg/dl)"} \longrightarrow X : \mathcal{N}(5.5, 0.9)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(4.3 \leq x \leq 6.1) &= P\left(\frac{4.3 - 5.5}{0.9} \leq Z \leq \frac{6.1 - 5.5}{0.9}\right) = P(-1.33 \leq Z \leq 0.67) \\ &= P(Z \leq 0.67) - P(Z \leq -1.33) = P(Z \leq 0.67) - P(Z \geq 1.33) \\ &= P(Z \leq 0.67) - [1 - P(Z \leq 1.33)] = 0.7486 - (1 - 0.9082) \\ &= 0.6568 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq a) &= P\left(Z \geq \frac{a - 5.5}{0.9}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 5.5}{0.9}\right) = 0.015 \\ \implies P\left(Z \leq \frac{a - 5.5}{0.9}\right) &= 0.985 \xrightarrow{\text{Tabla}} \frac{a - 5.5}{0.9} = 2.17 \implies \boxed{a = 7.453} \end{aligned}$$

Nota: En el enunciado no aparecen los datos de la Normal necesarios para la resolución del primer apartado. En la solución oficial toman como media 5.2, en lugar de 5.5 que pone el enunciado, en cuyo caso sí que son válidos los datos aportados de la Normal. Nosotros nos hemos ceñido al enunciado original.

_____ o _____