

MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2026

- Extraordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Julio 2026 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hemos estado reparando una silla de estructura metálica porque cojeaba ya que los extremos inferiores de sus cuatro patas no apoyaban simultáneamente en un suelo plano. Por ello, tenemos la silla tumbada sobre una mesa de trabajo de 120 centímetros de altura. La silla tiene cuatro patas de 45 centímetros de longitud cada una. Tras el trabajo de reparación, los extremos inferiores de las patas se encuentran situados en los puntos $A(-2, 3, 120)$, $B(20, 42, 120)$, $C(-1, 4, 165)$ y $D(20, 43, 165)$. Cuando bajemos la silla de la mesa de trabajo y la dejemos en el suelo, ¿cojeará o apoyará sus cuatro patas sobre el suelo plano del taller?

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción Única - Extraordinario)

Solución.

Vamos a ver si los cuatro puntos son coplanarios.

$$\overrightarrow{AB} = (22, 39, 0) \quad \& \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, 45) \quad \& \quad \overrightarrow{AD} = (22, 40, 45)$$
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 22 & 39 & 0 \\ 1 & 1 & 45 \\ 22 & 40 & 45 \end{vmatrix} = 1755 \neq 0$$

Los puntos A , B , C y D no son coplanarios, por lo tanto la silla cojeará

Ejercicio 2 (2 puntos)

Existen funciones que, aunque tienen primitivas, estas no pueden expresarse en términos de funciones elementales y no podemos calcularlas. Un ejemplo es $f(x) = \sin(x^2)$. Aunque no la podemos calcular, vamos a llamar $F(x)$ a la primitiva de $f(x)$ que cumple $F(0) = 0$.

a) (0.8 puntos) ¿Cuál es la derivada de $F(x)$?

b) (1.2 puntos) Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3}$$

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción Única - Extraordinario)

Solución.

a) $F'(x) = f(x) = \sin(x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos(x^2)}{6x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Sean A , M y N tres matrices cuadradas de tamaño 4×4 que satisfacen la condición

$$M \cdot A = I + N \cdot A$$

donde I es la matriz identidad de orden 4.

a) (1 punto) Justifica que A es regular.

b) (1 punto) Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula

la matriz inversa A^{-1} .

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción Única - Extraordinario)

Solución.

a) $M \cdot A = I + N \cdot A \implies M \cdot A - N \cdot A = I \implies (M - N) \cdot A = I \implies \boxed{A^{-1} = M - N}$
por lo tanto como $\exists A^{-1}$ la matriz A es regular.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/3 & 5 & 0 & -1 \\ \pi & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{3} & 1 \\ 1/3 & 5 & -1 & 0 \\ \pi & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

_____ o _____

Ejercicio 4A (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$:

a) (0.8 puntos) Calcula sus asíntotas.

b) (1.2 puntos) Estudia su monotonía. Justifica que $f(x) \geq 8$ si $x \in [3, 5]$.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) ■ Dominio: $x - 2 = 0 \implies x = 2 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

■ A. Vertical: $\exists A.V.$ en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

■ A. Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \implies \nexists A.H.$

■ A. Oblicua: $\exists A.O.$ en $y = x + 2$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{2}{1} = 2$$

$$b) f'(x) = \frac{2x \cdot (x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \implies x^2 - 4x = x \cdot (x-4) = 0 \implies x = \{0, 4\}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 2) \cup (2, 4)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(4, 8)$ y un *máximo relativo* en $(0, 0)$.

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(3, 4)$ y *creciente* en $(4, 5)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(4, 8)$, por lo tanto $f(x) \geq 8 \forall x \in [3, 5]$.

_____ o _____

Ejercicio 4B (2 puntos)

Sea $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$. Calcula el área de la región delimitada por $f(x)$ y la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

Hallamos la recta tangente a $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$ en el punto de abscisa $x = 2$

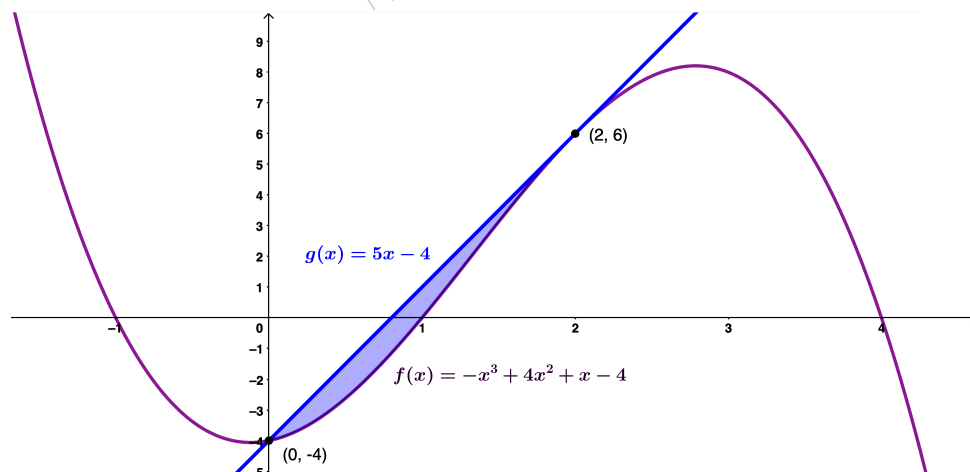
$$\begin{aligned} x_0 = 2 &\implies y_0 = f(x_0) = f(2) = 6 \implies (x_0, y_0) = (2, 6) \\ f'(x) &= -3x^2 + 8x + 1 \\ m_r = f'(x_0) &= f'(2) = 5 \\ r \equiv y - y_0 &= m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 6 = 5 \cdot (x - 2) \implies r \equiv y = g(x) = 5x - 4 \end{aligned}$$

Hallamos el área del recinto limitado por la función $f(x)$ y la recta $g(x)$

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4 - (5x - 4) \\ &= -x^3 + 4x^2 - 4x = -x \cdot (x - 2)^2 = 0 \implies x = \{0, 2\} \end{aligned}$$

lo que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 2)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^2 h(x) dx = \int_0^2 (-x^3 + 4x^2 - 4x) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(-4 + \frac{32}{3} - 8 \right) - 0 = -\frac{4}{3} \\ \text{Área} &= |A_1| = \frac{4}{3} \simeq 1.33 \text{ u}^2 \end{aligned}$$



Ejercicio 5A (2 puntos)

Tenemos dos urnas, A y B , con bolas rojas y azules. En la urna A hay dos bolas rojas y tres bolas azules. En la urna B hay dos bolas azules y tres bolas rojas.

- a) (1 punto) Si sacamos al azar una bola de cada urna, ¿qué es más probable, que salgan dos bolas del mismo color o de color diferente?
- b) (1 punto) Las bolas extraídas en a) las introducimos en la urna contraria, es decir, la sacada de la urna A la metemos en la urna B y viceversa. Si sacamos ahora una bola al azar de la urna B , ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

- a) Sean los sucesos:

$R_i \equiv$ "Extraer bola roja de la urna i "

$A_i \equiv$ "Extraer bola azul de la urna i "

$$\begin{aligned} P(\text{"mismo color"}) &= P((R_A \cap R_B) \cup (A_A \cap A_B)) = P(R_A \cap R_B) + P(A_A \cap A_B) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25} = 0.48 \end{aligned}$$

$$P(\text{"distinto color"}) = 1 - P(\text{"mismo color"}) = 1 - 0.48 = 0.52$$

Luego es más probable que ambas bolas sean de distinto color.

- b)
- Si las bolas son del mismo color, al intercambiarlas de urna la urna B tiene la misma composición de 3 rojas y 2 azules.
 - Si tenemos R_A y A_B la urna B queda con 4 rojas y 1 azules.
 - Si tenemos A_A y R_B la urna B queda con 2 rojas y 3 azules.

$$\begin{aligned} P(\text{Azul en } B) &= P(\text{"mismo color"}) \cdot P(\text{Azul en } B \mid \text{"mismo color"}) \\ &\quad + P(R_A \cap A_B) \cdot P(\text{Azul en } B \mid (R_A \cap A_B)) \\ &\quad + P(A_A \cap R_B) \cdot P(\text{Azul en } B \mid (A_A \cap R_B)) = \frac{12}{25} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{11}{25} = 0.44 \end{aligned}$$

_____ o _____

Ejercicio 5B (2 puntos)

El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148.44 litros por persona y día.

¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2026 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

Como subirán las tasas del 20 % que más consume y bajarán al 20 % que menos consume, la población que mantiene las tasas se circunscribe a un intervalo de confianza al 60 % para el consumo medio. El error de este intervalo será $E = 148.44 - 135 = 13.44$, luego el extremo inferior del intervalo será $135 - 13.44 = 121.56$

Por lo tanto si el consumo del hogar es inferior a 121.56 litros se le bajarán las tasas.

Solución alternativa: Esta solución es más formal pero innecesariamente complicada

$X \equiv$ "Consumo de agua diario por persona (ℓ)" $\rightarrow X : \mathcal{N}(135, \sigma)$

$$P(X \geq 148.44) = P\left(Z \geq \frac{148.44 - 135}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{13.44}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{13.44}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{13.44}{\sigma}\right) = 0.8 \xrightarrow{\text{Tabla}} \frac{13.44}{\sigma} = 0.845 \Rightarrow \sigma = 15.9053$$

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - 135}{15.9053}\right) = P\left(Z \geq -\frac{a - 135}{15.9053}\right) = 1 - P\left(Z \leq -\frac{a - 135}{15.9053}\right) = 0.2$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 135}{15.9053}\right) = 0.8 \xrightarrow{\text{Tabla}} -\frac{a - 135}{15.9053} = 0.845 \Rightarrow \boxed{a = 121.56}$$

_____ o _____