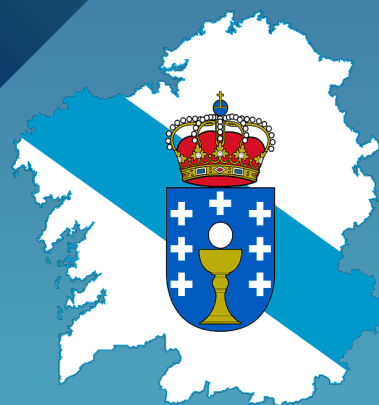


MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2026

- Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Junio 2026 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2 puntos)

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada. Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0, 1)$):

$$P(Z \leq 0.3) = 0.6179 \quad \& \quad P(Z \leq 0.75) = 0.7734 \quad \& \quad P(Z \leq 0.83) = 0.7967 \\ P(Z \leq 1.125) = 0.8697 \quad \& \quad P(Z \leq 4.16) = 1$$

- a) Por el contexto, se sabe: $P(R | \bar{I}) = P(X > 780)$ & $P(R | I) = P(Y > 840)$
Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y . Luego, determine la probabilidad de que, seleccionado al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.
- b) Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción Única)

Solución.

- a) $I \equiv$ “Hay incidencias meteorológicas” & $R \equiv$ “Existe un retraso significativo”

$X \equiv$ “Tiempo de viaje en condiciones operativas (min)” $\longrightarrow X : \mathcal{N}(765, 18)$

$Y \equiv$ “Tiempo de viaje en un día con incidencias (min)” $\longrightarrow Y : \mathcal{N}(810, 40)$

$$P(R | \bar{I}) = P(X \geq 780) = P\left(Z \geq \frac{780 - 765}{18}\right) = P(Z \geq 0.83) = 1 - P(Z \leq 0.83) \\ = 1 - 0.7967 = 0.2033$$

$$P(R | I) = P(Y \geq 840) = P\left(Z \geq \frac{840 - 810}{40}\right) = P(Z \geq 0.75) = 1 - P(Z \leq 0.75) \\ = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

$$P(R) = P(\bar{I}) \cdot P(R | \bar{I}) + P(I) \cdot P(R | I) = 0.3 \cdot 0.2033 + 0.7 \cdot 0.2266 = 0.21961$$

$$b) P(Y \leq 765) = P\left(Z \leq \frac{765 - 810}{40}\right) = P(Z \leq -1.125) = P(Z \geq 1.125) \\ = 1 - P(Z \leq 1.125) = 1 - 0.8697 = 0.1303$$



Ejercicio 2A (2 puntos)

Considérese la igualdad matricial $A \cdot (X - I) \cdot B = C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

a) Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.

b) ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

$$a) A \cdot (X - I) \cdot B = C \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot (X - I) \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$\implies X - I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} + I}$$

$$b) \underbrace{\underbrace{\underbrace{A}_{1 \times 2} \cdot \underbrace{(X - I)}_{2 \times 2}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{B}_{2 \times 2}}_{1 \times 2} = \underbrace{C}_{1 \times 2} \implies B \in \mathcal{M}_{2 \times 2} \quad \& \quad X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$$

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ la matriz diagonal con traza nula pedida. Tenemos:

$$A \cdot (X - I) \cdot B = C \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1+b & b-a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} a-1+b=0 \Rightarrow a+b=1 \\ b-a-1=0 \Rightarrow a-b=-1 \end{cases} \implies \boxed{\begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

_____ o _____

Ejercicio 2B (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x + 5z = 9 \\ (m-1)y + 6z = m+8 \\ (m-4)x + (m-1)y + 7z = m+9 \end{cases}$$

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = -4m^2 + 20m - 16 = -4 \cdot (m-1) \cdot (m-4) = 0 \implies m = \{1, 4\}$$

- Si $m \neq \{1, 4\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 7 & 10 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 9 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (\nexists \text{ solución})}$$

- Si $m = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (\nexists \text{ solución})}$$

_____ o _____



Ejercicio 3A (4 puntos)

Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

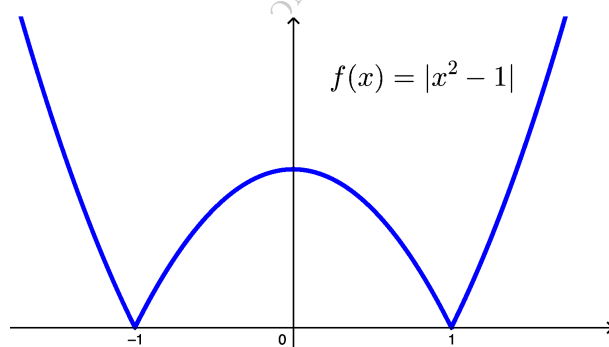
- a) Continua pero no derivable en $x = 0$.
- b) Continua en $[a, b]$, con $f(a) \cdot f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a) \cdot f(b) < 0$ y $f' > 0$ en (a, b) y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

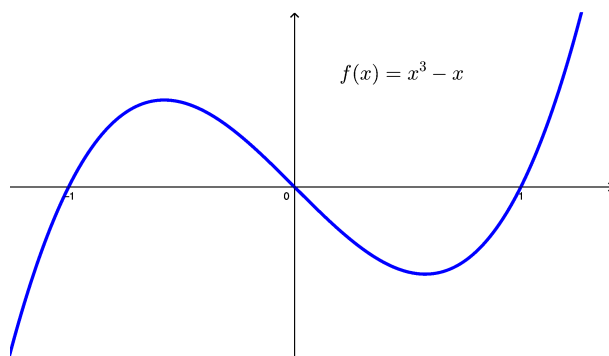
Solución.

- a) La función valor absoluto es siempre continua pero no derivable. Hemos elegido $f(x) = |x^2 - 1|$ que es continua en $\mathbb{R}$ pero no es derivable en $x = -1$ y $x = 1$.

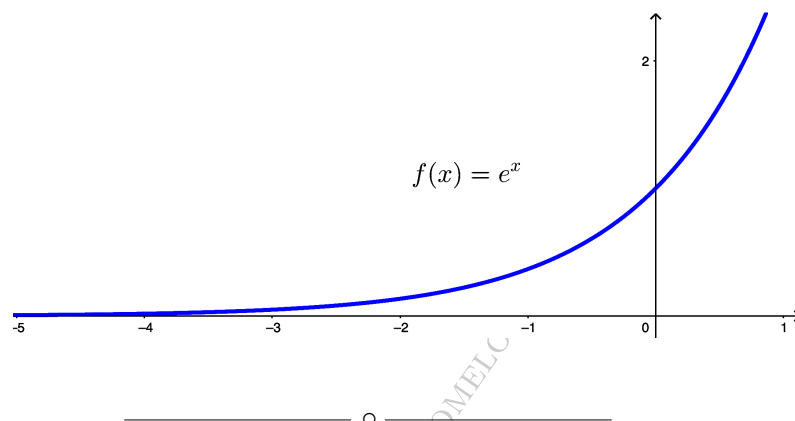
$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & , \text{ si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & , \text{ si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$



- b) Nos piden una función que cumpla las hipótesis del *Teorema de Bolzano* que tenga más de una raíz. Hemos elegido $f(x) = x^3 - x$ que corta al eje de abscisas en $f(x) = x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) \implies x = \{0, -1, 1\}$ y que en el intervalo $[-2, 2]$ cumple que $f(-2) = -6$ y $f(2) = 6 \implies f(-2) \cdot f(2) < 0$.



- c) Si en el intervalo (a, b) se cumple que $f' > 0$ quiere decir que es siempre creciente y por tanto no puede cortar dos veces al eje de abscisas. Luego no es posible representar una función con estas características.
- d) El hecho de que sea monótona en $\mathbb{R}$ nos hace pensar en una función que sea *creciente* o *decreciente* en $\mathbb{R}$. Por otra parte el dato $f''(x) > 0$ nos indica que la función es *convexa* ($\cup$) en $\mathbb{R}$. Pensamos en $f(x) = \ln x$, que es *monótona creciente* en $\mathbb{R}$, pero se trata de una función *cóncava* ($\cap$). De hecho $f'(x) = \frac{1}{x} \implies f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
- Otra función *monótona creciente* es $f(x) = e^x$ que sí que es *convexa* ($\cup$), y de hecho, $f'(x) = e^x \implies f''(x) = e^x > 0$.



Ejercicio 3B (4 puntos)

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x$

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x} = \frac{0}{1} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^3 x} = \frac{1}{1} = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2\sqrt{x^3}}{x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{x}) = 0$



Ejercicio 3C (4 puntos)

Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción C)

Solución.

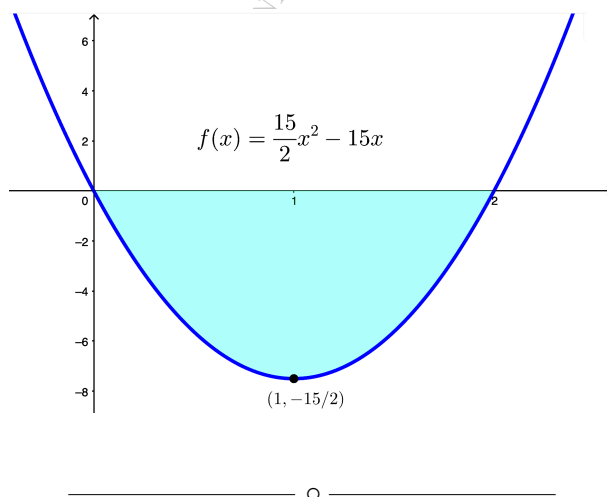
Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX

$$f(x) = ax^2 - 2ax = ax \cdot (x - 2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 2)$

$$A_1 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (ax^2 - 2ax) dx = \left[\frac{ax^3}{3} - ax^2 \right]_0^2 = \left(\frac{8a}{3} - 4a \right) - 0 = -\frac{4a}{3}$$
$$\text{Área} = |A_1| = \left| -\frac{4a}{3} \right| = 10 \implies \begin{cases} -\frac{4a}{3} = 10 \Rightarrow a = -\frac{15}{2} \quad (a > 0) \\ -\frac{4a}{3} = -10 \Rightarrow a = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto $f(x) = \frac{15}{2}x^2 - 15x$, que es una parábola *convexa* ($\cup$) con vértice en el punto $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-15}{15} = 1 \implies (1, -15/2)$ y que corta al eje OX en $(0, 0)$ y $(2, 0)$.



Ejercicio 4A (2 puntos)

Sea r la recta que pasa por el origen y por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(1, 0, 1)$ con respecto al punto $Q(0, 1, 0)$. Se pide:

- Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r .
- Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

- a) El punto Q es el punto medio entre P y su simétrico P' .

$$Q = \frac{P + P'}{2} \implies P' = 2Q - P = 2 \cdot (0, 1, 0) - (1, 0, 1) \implies P'(-1, 2, -1)$$

$$r \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{d}_r = \overrightarrow{OP'} = (-1, 2, -1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$b) \pi \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d}_r = (-1, 2, -1) \end{cases} \implies \pi \equiv -x + 2y - z + D = 0 \xrightarrow{O \in \pi} D = 0$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv x - 2y + z = 0}$$

Ejercicio 4B (2 puntos)

Considérense los puntos $P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 0)$ y $R(1, 1, 1)$.

- Demuestre que P , Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.
- Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a, 0, 0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

$$a) \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1) \quad \& \quad \overrightarrow{PR} = (0, 1, 0) \implies \frac{-1}{0} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{0} \implies P, Q \text{ y } R \text{ no están alineados.}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} Q(0, 1, 0) \\ \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{PR} = (0, 1, 0) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x - z = 0}$$

$$b) d(S, \pi) = \frac{|a|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \implies |a| = 2 \implies \boxed{a = \pm 2}$$

