

MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2026

- Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



2026

Curso 2025/26

Junio 2026 (Ordinario)

Ejercicio 1A (2.5 puntos)

Considera la matriz presentada a continuación,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- a) (0.5 puntos) Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a .
- b) (1 punto) Calcula A^{100} en función del parámetro a .
- c) (1 punto) Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple:

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a = 0 \implies a = 0$

■ Si $a \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3$

■ Si $a = 0 \implies |A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \& \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \dots$

Suponemos: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & ka & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1) \cdot a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{pmatrix} = A^{k+1} \text{ q.e.d.}$$

Por lo tanto: $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{100} \end{pmatrix}$

c) $a = -1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -1 \quad \& \quad \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot X \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot A$$

$$\implies X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

○

Ejercicio 1B (2.5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + az = 1 \\ ay + z = 2 - a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

- (1.5 puntos) Discute el sistema en función de los valores de a .
- (0.5 puntos) Considera $a = 2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.
- (0.5 puntos) Considera $a = 1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

- a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 2-a \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = 1 - a^2 = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (\# solución)}$$

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^\circ \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

- b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} &= 0 & \Rightarrow & \boxed{x = -1/3} \\ \Rightarrow y + 2 \cdot \frac{2}{3} &= 1 & \Rightarrow & \boxed{y = -1/3} \\ \Rightarrow -3z &= -2 & \Rightarrow & \boxed{z = 2/3} \end{aligned}$$

- c) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como se trata de un S.C.I. resolvemos el sistema formado por las ecuaciones linealmente independientes de la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{aligned} &\Rightarrow x + 1 - \lambda + \lambda = 1 \\ &\Rightarrow y + \lambda = 1 \\ &\Rightarrow z = \lambda \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}}$$

_____ o _____

Ejercicio 2A (2.5 puntos)

Considera la función presentada a continuación, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$, donde $a \in \mathbb{R}$.
Responde a las siguientes cuestiones:

- a) (1 punto) Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$.
- b) (1 punto) Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) (0.5 puntos) Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

a) A. Oblicua: $y = x - 6$

$$\blacksquare m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + a^2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{1} = 1 \checkmark$$

$$\begin{aligned} \blacksquare n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2 - a^2x}{x + a^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a - a^2) \cdot x + 1}{x + a^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\ &= \frac{a - a^2}{1} = -6 \implies a - a^2 = -6 \implies a^2 - a - 6 = 0 \implies \boxed{a = \{-2, 3\}} \end{aligned}$$

b) Si $a = -2 \implies f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$ & $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 2) \cdot (x + 4) - (x^2 - 2x + 1)}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 9}{(x + 4)^2} = 0 \implies x^2 + 8x - 9 = 0 \\ \implies x &= \{-9, 1\} \end{aligned}$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-9, -4) \cup (-4, 1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1, 0)$ y un *máximo relativo* en $(-9, -20)$.

c) $x_0 = -1 \implies y_0 = f(x_0) = f(-1) = \frac{4}{3} \implies (x_0, y_0) = (-1, 4/3)$

$$m_r = f'(x_0) = f'(-1) = -\frac{16}{9}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - \frac{4}{3} = -\frac{16}{9} \cdot (x + 1) \implies \boxed{y = -\frac{16}{9}x - \frac{4}{9}}$$

_____ o _____

Ejercicio 2B (2.5 puntos)

Considera la función real presentada a continuación, $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$ y responde a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$.

b) (1.5 puntos) Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

a) ■ Dominio: $e^{2x} - 4 = 0 \implies e^{2x} = 4 \implies 2x \cdot \ln e = \ln 4 \implies x = \frac{1}{2} \cdot \ln 4 = \ln 2$
 $\implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \ln 2$

■ A. Vertical: $\exists A.V.$ en $x = \ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \ln 2^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

■ A. Horizontal: $\exists A.H.$ en $y = \frac{1}{4}$ & $\exists A.H.$ en $y = 0$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 1}{e^{-2x} - 4} = \frac{0 - 1}{0 - 4} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$$

b) $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt \end{array} \right\} = \int \frac{t - 1}{t^2 - 4} \cdot \frac{1}{t} dt$

$$= \int \frac{t - 1}{t^3 - 4t} dt \stackrel{(*)}{=} \int \frac{1/4}{t} dt + \int \frac{1/8}{t - 2} dt + \int \frac{-3/8}{t + 2} dt$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \ln |t| + \frac{1}{8} \cdot \ln |t - 2| - \frac{3}{8} \cdot \ln |t + 2| + K$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \ln |e^x| + \frac{1}{8} \cdot \ln |e^x - 2| - \frac{3}{8} \cdot \ln |e^x + 2| + K$$

$$F(\ln 4) = \frac{1}{4} \cdot \ln 4 + \frac{1}{8} \cdot \ln 2 - \frac{3}{8} \cdot \ln 6 + K = \ln 2 \implies K = \frac{3}{8} \cdot (\ln 2 + \ln 6)$$

$$\implies \boxed{F(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln |e^x| + \frac{1}{8} \cdot \ln |e^x - 2| - \frac{3}{8} \cdot \ln |e^x + 2| + C + \frac{3}{8} \cdot (\ln 2 + \ln 6)}$$

$$(*) \quad t^3 - 4t = t \cdot (t - 2) \cdot (t + 2)$$

$$\frac{t - 1}{t^3 - 4t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t - 2} + \frac{C}{t + 2} = \frac{A(t - 2) \cdot (t + 2) + Bt \cdot (t + 2) + Ct \cdot (t - 2)}{t \cdot (t - 2) \cdot (t + 2)}$$

$$\implies \begin{cases} \langle t = 0 \rangle & -1 = -4A & \Rightarrow A = 1/4 \\ \langle t = 2 \rangle & 1 = 8B & \Rightarrow B = 1/8 \\ \langle t = -2 \rangle & -3 = 8C & \Rightarrow C = -3/8 \end{cases}$$

_____ o _____

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(0, 0, 4)$, $B(-3, 0, 0)$ y $C(0, -2, 0)$.

- a) (0.5 puntos) Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a A , B y C .
- b) (1 punto) Calcula la distancia entre el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta que contiene a A y B .
- c) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices A , B , C y $D(0, 0, 0)$.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción Única)

Solución.

$$\text{a) } \pi \equiv \begin{cases} A(0, 0, 4) \\ \vec{AB} = (-3, 0, -4) \\ \vec{AC} = (0, -2, -4) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8x - 12y + 6(z-4) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv 4x + 6y - 3z + 12 = 0}$$

$$\text{b) } r \equiv \begin{cases} A(0, 0, 4) \\ \vec{d}_r = \vec{AB} = (-3, 0, -4) \end{cases}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{9+0+16}} = \frac{|(-4, 13, 3)|}{5} = \frac{\sqrt{16+169+9}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{194}}{5} \simeq 2.79 \text{ u}$$

$$\text{c) } \text{Vol} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}]| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |24| = 4 \text{ u}^3$$

_____ o _____

Ejercicio 4A (2.5 puntos)

En un criadero de cobayas tienen variedades de pelo corto y de pelo largo. En cualquiera de estas variedades, disponen de animales blancos o marrones. Del total de cobayas, el 60 % es de pelo corto, y solo el 8 % son blancas de pelo largo.

- a) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que, habiendo elegido una cobaya de pelo largo al azar, esta sea de color marrón.
Si la probabilidad de escoger al azar una cobaya blanca es de 0.2:
- b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya marrón al azar, esta sea de pelo largo.
- c) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido una cobaya de pelo corto, esta sea marrón.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$C \equiv$ “La cobaya es de pelo corto”

$L \equiv$ “La cobaya es de pelo largo”

$B \equiv$ “La cobaya es blanca”

$M \equiv$ “La cobaya es marrón”

Hacemos una *tabla de contingencia* con los datos (en negro) y la completamos (en azul)

	C	L	Total
B	0.12	0.08	0.2
M	0.48	0.32	0.8
Total	0.6	0.4	1

a) $P(M | L) = \frac{0.32}{0.4} = 0.8$

b) $P(L | M) = \frac{0.32}{0.8} = 0.4$

c) $P(M | C) = \frac{0.48}{0.6} = 0.8$

_____ o _____

Ejercicio 4B (2.5 puntos)

El diámetro de las mandarinas de cierta variedad se distribuye normalmente con una media de 60 mm y una desviación típica de 16 mm.

- a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro menor de 40 mm o mayor de 90 mm.
- b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que, al escoger al azar dos mandarinas, ambas tengan menos de 50 mm de diámetro.
- c) (0.5 puntos) Calcula la probabilidad de que, habiendo escogido al azar una mandarina, esta tenga un diámetro entre 40 mm y 50 mm.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

$X \equiv \text{"Diámetro de las mandarinas (mm)"} \rightarrow X : \mathcal{N}(60, 16)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P((X \leq 40) \cup (X \geq 90)) &= 1 - P(40 \leq X \leq 90) = 1 - \left[P\left(\frac{40 - 60}{16} \leq Z \leq \frac{90 - 60}{16}\right) \right] \\ &= 1 - [P(-1.25 \leq Z \leq 1.875)] = 1 - [P(Z \leq 1.875) - P(Z \leq -1.25)] \\ &= 1 - [P(Z \leq 1.875) - P(Z \geq 1.25)] \\ &= 1 - \{P(Z \leq 1.875) - [1 - P(Z \leq 1.25)]\} = 1 - [0.97025 - (1 - 0.8944)] \\ &= 1 - 0.86465 = 0.13535 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \leq 50) &= P\left(Z \leq \frac{50 - 60}{16}\right) = P(Z \leq -0.625) = P(Z \geq 0.625) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.625) = 1 - 0.73405 = 0.26595 \end{aligned}$$

$Y \equiv \text{"Nº de mandarinas menores de 50mm de entre 2"} \rightarrow Y : \mathcal{B}(2, 0.26595)$

$$P(Y = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0.26595^2 \cdot 0.73405^0 = 0.0707$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(40 \leq X \leq 50) &= P\left(\frac{40 - 60}{16} \leq Z \leq \frac{50 - 60}{16}\right) = P(-1.25 \leq Z \leq -0.625) \\ &= P(Z \leq -0.625) - P(Z \leq -1.25) = P(Z \geq 0.625) - P(Z \geq 1.25) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.625) - [1 - P(Z \leq 1.25)] = 1 - 0.73405 - (1 - 0.8944) \\ &= 0.16035 \end{aligned}$$

_____ o _____