

MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2026

- Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Junio 2026 (Ordinario)

Ejercicio 1A (2.5 puntos)

Un cliente de una cafetería compra 1 café, 2 té y 2 zumos y paga 11 euros. Al día siguiente compra 1 café, 3 té y 3 zumos y paga 16 euros. El tercer día compra 3 cafés, 3 té y los zumos que pueda pagar con 21 euros exactos (no deben darle vuelta). Se pide:

- (1.5 puntos) Encuentra un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema de calcular el precio de cada producto en función del número p de zumos que le den el tercer día. Discutir el sistema obtenido en función del número de zumos pagados el último día.
- (0.5 puntos) El camarero del tercer día le dice “Por ese dinero te daré dos zumos”, el cliente dice “Eso es imposible, el precio está mal calculada” ¿quién tiene razón? Justifica la respuesta.
- (0.5 puntos) El camarero le responde, en efecto, tiene usted razón, en realidad le tengo que dar 4 zumos y el cliente queda satisfecho. ¿A qué precio le ha cobrado cada bebida?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

- a) Sean las incógnitas: $x \equiv$ “Precio del café (€)”
 $y \equiv$ “Precio del té (€)”
 $z \equiv$ “Precio del zumo (€)”

Y sea p el número de zumos que toma el tercer día. Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 11 \\ x + 3y + 3z = 16 \\ 3x + 3y + pz = 21 \end{cases}$$

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & p & 21 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = p - 3 = 0 \implies p = 3$$

- Si $p \neq 3$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $p = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 3 & 21 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 21 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (\# solución)}$$

b) Si $p = 2 \neq 3$, el sistema es S.C.D. y lo resolvemos por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 11 \\ 1 & 3 & 3 & | & 16 \\ 3 & 3 & 2 & | & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & -3 & -4 & | & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = 3 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = \\ y = \\ z = -3 < 0 ! \end{matrix}}$$

El precio de las bebidas no puede ser negativo, por lo que el cliente tiene razón y el precio está mal calculado.

c) Si $p = 4 \neq 3$, el sistema es S.C.D. y lo resolvemos por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 11 \\ 1 & 3 & 3 & | & 16 \\ 3 & 3 & 4 & | & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & -3 & -2 & | & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow x + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 11 \\ \Rightarrow y + 3 = 5 \\ \Rightarrow z = 3 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{matrix}}$$

Luego el precio del café es de 1 €, el del té 2 € y el del zumo 3 €.

_____ o _____

Ejercicio 1B (2.5 puntos)

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) (0.5 puntos) Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $\det(B)$?
- c) (1 punto) Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & 0 & 0 \\ -4a & 1 & 0 \\ -4a & 2a+3 & 1-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2a=1 \Rightarrow a=0 \\ -4a=0 \Rightarrow a=0 \checkmark \\ 2a=0 \Rightarrow a=0 \checkmark \end{cases}$$

$$\text{b) } |B^2| = |2I| \Rightarrow |B|^2 = 2^3 \cdot |I| = 8 \Rightarrow |B| = \sqrt{8} \Rightarrow |B| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{c) } |A| = 1-2a=0 \Rightarrow a=1/2$$

$$\blacksquare \text{ Si } a \neq 1/2 \Rightarrow |A| = 1-2a \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

$$\blacksquare \text{ Si } a = 1/2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

_____ o _____

Ejercicio 2A (2.5 puntos)

Una empresa inicia su cotización en bolsa, con un precio de 5 euros la acción. A partir de ahí, el precio de cada acción se modelizó en función del tiempo pasado en bolsa desde ese momento inicial y durante el primer mes. Se obtuvo la siguiente función $f(t) = \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1}$, $t \in [0, 30]$.

- (1 punto) Si la empresa necesita que el valor de cada acción llegue a 6.5 euros para que se alcancen los objetivos previstos ¿se alcanzan en el intervalo estudiado?
- (0.75 puntos) Estudia los intervalos en los que el precio de cada acción sube y los intervalos donde baja.
- (0.75 puntos) ¿Cuál sería el valor de la acción si esta función modelizase el valor de las acciones a lo largo de toda la vida de la empresa?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

- a) Estudiamos la *monotonía* de la función $f(t)$

$$f'(t) = \frac{(10t + 2) \cdot (t^2 + 1) - (5t^2 + 2t + 5) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-2 \cdot (t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

	$(0, 1)$	$(1, 30)$
Signo $f'(t)$	+	-
$f(t)$	Creciente ↗	Decreciente ↘

El precio de la acción $f(t)$ es *creciente* en $(0, 1)$ y *decreciente* en $(1, 30)$, y tiene un *máximo relativo*, que es también *absoluto*, en $t = 1$ con un valor de $f(1) = 6$ €, y, como $f(0) = 5$ y $f(30) = 5.067$, el valor mínimo de la acción es de 5 € en el inicio. Por lo tanto la acción nunca alcanzará los 6.5 €.

- b) Ha quedado respondido en el apartado anterior.

- c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{5}{1} = 5$ € es el valor en el que se estabiliza el precio.

_____ o _____

Ejercicio 2B (2.5 puntos)

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & , \text{ si } x < 2 \\ \sqrt{5x - 1} & , \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular el valor de A para el que f es una función continua.
- (1.25 puntos) Si $A = 6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- (0.5 puntos) Para $A = 6$ ¿es $x = 2$ un extremo relativo de la función? ¿De qué tipo?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

a) Continuidad de $f(x)$:

- Si $x \neq 2$ la función $f(x)$ es continua pues $f_1(x)$ es un polinomio y $f_2(x)$ es continua si $5x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1/5$.

- Si $x = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - Ax + 11) = 15 - 2A$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{5x - 1} = 3$
- $f(2) = \sqrt{10 - 1} = 3$

$$f(x) \text{ continua en } x = 2 \iff \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow 15 - 2A = 3 \Rightarrow \boxed{A = 6}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & , \text{ si } x < 2 \\ \sqrt{5x - 1} & , \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 & , \text{ si } x < 2 \\ \frac{5}{2\sqrt{5x - 1}} > 0 & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	—	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty, 2)$ y *creciente* en $(2, +\infty)$.

c) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(2, 3)$.

_____ o _____

Ejercicio 3A (2.5 puntos)

Se sabe que la función $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ es una primitiva de f . Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la función f .
- b) (0.75 puntos) Calcular una función que sea una primitiva de f y tal que $x = 0$ tome el valor 6.
- c) (0.75 puntos) Calcular el área del recinto encerrado por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

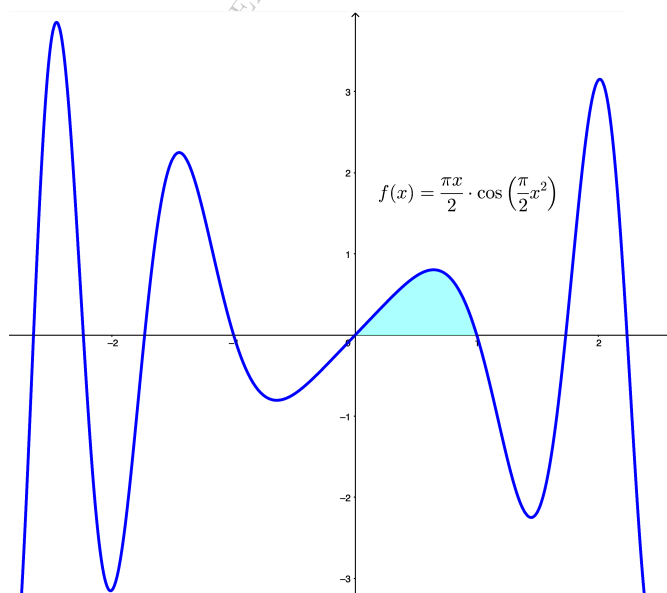
a) $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2x = \frac{\pi x}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$

b) $H(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + C \xrightarrow{H(0)=6} C = 6 \implies H(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + 6$

c) Hallamos los cortes de $f(x)$ con el eje $OX \implies f(x) = \frac{\pi x}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) = 0$

$$\implies \begin{cases} \frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}x^2 = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1) \Rightarrow x = \sqrt{2k+1}, k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Que, entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$ define un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$



$$A_1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{\pi x}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{1}{2} u^2$$

_____ o _____

Ejercicio 3B (2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular una primitiva de la función f .
- b) (1.25 puntos) Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{x-2}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{2}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{u'/u} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+1| - 2 \cdot \arctan x + C \end{aligned}$$

- b) Los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX son:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+1} = 0 \implies x-2 = 0 \implies x = 2$$

Que junto con las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, definen un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \ln 1 - 2 \cdot 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln 2 - \frac{\pi}{2} \\ \text{Área} &= |A_1| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \frac{\pi - \ln 2}{2} \simeq 1.224 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4A (2.5 puntos)

Se considera el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y el punto $P(0, -1, -2)$. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Encontrar la ecuación de una recta paralela a π y que contenga al punto P . ¿Es única esa recta?
- b) (1.25 puntos) Calcular el punto $Q \in \pi$ que menos dista de P . ¿Qué distancia hay entre P y Q ?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

- a) El vector director $\vec{d}_r$ será cualquiera perpendicular a $\vec{n}_\pi = (1, 2, 3)$, por ejemplo $\vec{d}_r = (2, -1, 0)$, ya que $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (2, -1, 0) \cdot (1, 2, 3) = 2 - 2 + 0 = 0 \implies \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi$. Por lo tanto cualquier recta que esté en un plano paralelo a π que pase por P cumpliría los requisitos del enunciado, luego la recta no es única.

$$r \equiv \begin{cases} P(0, -1, -2) \\ \vec{d}_r = (2, -1, 0) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- b) Q será la proyección de P sobre π

$$s \equiv \begin{cases} P(0, -1, -2) \\ \vec{d}_s = \vec{n}_\pi = (1, 2, 3) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$Q = s \cap \pi \implies \lambda + 2 \cdot (-1 + 2\lambda) + 3 \cdot (-2 + 3\lambda) = 6 \implies \lambda = 1 \implies \boxed{Q(1, 1, 1)}$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(1, 2, 3)| = \sqrt{1 + 4 + 9} \implies \boxed{d(P, Q) = \sqrt{14} \text{ u}}$$

_____ o _____

Ejercicio 4B (2.5 puntos)

Un móvil se desplaza en línea recta desde el punto $P(2, 1, 3)$ al punto $Q(0, -1, 1)$. Cuando llega a la mitad de la distancia de P a Q da un giro y se desplaza por la recta que pasa por $H(1, 1, 1)$.

- a) (0.5 puntos) Calcula las coordenadas del punto en el que se realiza el giro.
- b) (0.75 puntos) Calcula la recta por la que se desplaza el móvil tras realizar el giro
- c) (0.75 puntos) Calcula el ángulo de giro del móvil.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

a) El punto de giro G es el punto medio de P y $Q \implies G = \frac{P+Q}{2} = (1, 0, 2)$

b) $r \equiv \begin{cases} G(1, 0, 2) \\ H(1, 1, 1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} H(1, 1, 1) \\ \vec{d}_r = \overrightarrow{GH} = (0, 1, -1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{PG}| \cdot |\overrightarrow{GH}|} = \frac{(-1, -1, -1) \cdot (0, 1, -1)}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \implies \boxed{\alpha = 90^\circ}$

Ejercicio 5A (2.5 puntos)

En una industria textil se fabrican pantalones vaqueros. Se observa que se pueden producir dos tipos de defectos en la producción, en la longitud y en las costuras. Se hace un estudio y se detecta que el 10% de los pantalones suspenden el test de longitud, mientras que no pasan el test de las costuras, el 5%. Además, un 0.8% de las prendas, suspenden ambos test. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que una prenda seleccionada al azar suspenda al menos uno de los test.
- b) (1.25 puntos) Si una prenda seleccionada al azar ha suspendido el test de longitud ¿qué probabilidad hay de que también suspenda el test de costuras?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$L \equiv$ “El pantalón suspende el test de longitud”

$C \equiv$ “El pantalón suspende el test de las costuras”

Del enunciado tenemos:

$$P(L) = 0.1 \quad \& \quad P(C) = 0.05 \quad \& \quad P(L \cap C) = 0.008$$

$$\text{a) } P(L \cup C) = P(L) + P(C) - P(L \cap C) = 0.1 + 0.05 - 0.008 \implies \boxed{P(L \cup C) = 0.142}$$

$$\text{b) } P(C | L) = \frac{P(C \cap L)}{P(L)} = \frac{0.008}{0.1} \implies \boxed{P(C | L) = 0.08}$$

_____ o _____

Ejercicio 5B (2.5 puntos)

Una grúa debe levantar una serie de cajas. Cuando el brazo de la grúa intenta levantar más de 40 kg el sistema de seguridad se activa y la grúa no puede continuar. Supongamos que el peso de las cajas sigue una distribución $N(38, 1.2)$.

- a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de seguridad se active al intentar levantar una caja?
- b) (1.25 puntos) Se realiza el levantamiento de 10 cajas, una detrás de otra ¿cuál es la probabilidad de que el sistema salte al menos una vez?

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son:

$$F(x) = P(Z \leq x) \quad \& \quad F(0) = 0.5 \quad \& \quad F(1.6667) = 0.9520 \\ F(0.9520) = 0.83 \quad \& \quad F(0.83) = 0.7975 \quad \& \quad F(0.79) = 0.7852$$

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso de las cajas (kg)"} \longrightarrow X : \mathcal{N}(38, 1.2)$$

$$\text{a) } P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{40 - 38}{1.2}\right) = P(Z \geq 1.6667) = 1 - P(Z \leq 1.6667)$$

$$= 1 - 0.9520 \implies \boxed{P(X \geq 40) = 0.048}$$

$$\text{b) } X \equiv \text{"Nº de cajas que activan el sistema de seguridad"} \longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.048)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.048^0 \cdot 0.952^{10}$$

$$= 1 - 0.6115 \implies \boxed{P(X \geq 1) = 0.3885}$$

_____ o _____