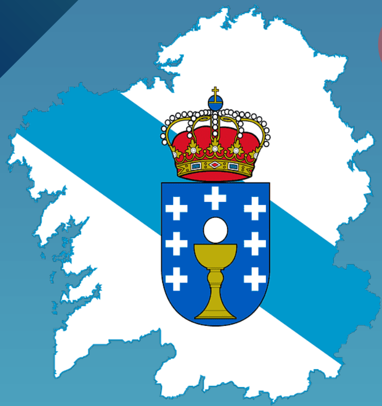
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^{\top}$, en donde $B^{\top}$ denota la matriz traspuesta de B, siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B.

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a)

- $|A| = -1 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1} \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Ajd}\, A^{\top} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

- $|B| = 0 \implies \text{ran}(B) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(B) = 2$

b) $X \cdot A + B = A \cdot B^{\top} \implies X \cdot A = A \cdot B^{\top} - B \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \left(A \cdot B^{\top} - B\right) \cdot A^{-1}$

$$\implies \boxed{X = \left(A \cdot B^{\top} - B\right) \cdot A^{-1}}$$

$$A \cdot B^{\top} - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(A \cdot B^{\top} - B\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x+2y\leq 40 \qquad \& \qquad x+y\geq 5 \qquad \& \qquad 3x+y\leq 45 \qquad \& \qquad x\geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x,y)=2x-3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

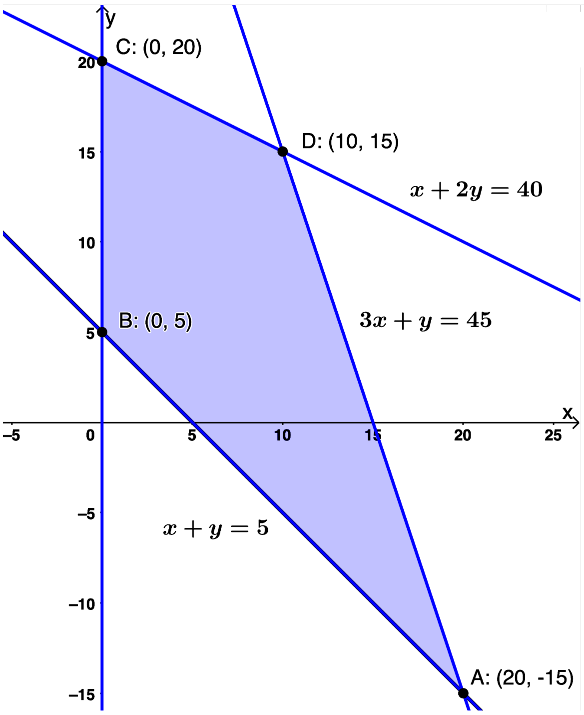
$$\begin{cases} 1 \ \ x+2y\leq 40 & \to (0,20) \quad \& \quad (40,0) \\ 2 \ \ x+y\geq 5 & \to (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ 3 \ \ 3x+y\leq 45 & \to (0,45) \quad \& \quad (15,0) \\ 4 \ \ x\geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\qquad f(x,y)=2x-3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	20	-15	85
B	0	5	-15
C	0	20	-60
D	10	15	-25



El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -60 y se produce en el punto $C:(0,20)$, mientras que el *máximo* de $f(x,y)$ es de 85 y se produce en el punto $A:(20,-15)$.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 28-(t-4)^2 & \text{, si } 0 \le t < 6 \\ (t-10)^2+8 & \text{, si } 6 \le t \le 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) *Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.*

b) *Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.*

c) *¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

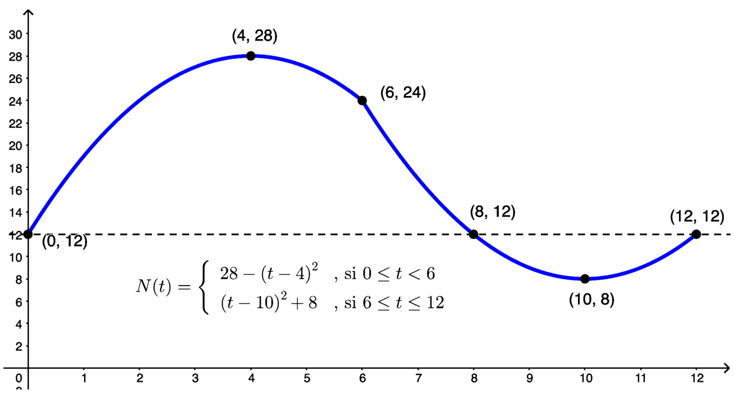
a) La función $N(t)$ es continua en $[0, 12]$ pues las ramas son funciones polinómicas y $\lim\limits_{x \to 6^-} N(t) = \lim\limits_{x \to 6^+} N(t) = N(6) = 24$. Además $N(0) = 12$ y $N(12) = 12$.

$$N'(t) = \begin{cases} -2t+8 = 0 \implies t = 4 & \text{, si } 0 < t < 6 \\ 2t-20 = 0 \implies t = 10 & \text{, si } 6 < t < 12 \end{cases}$$

	$(0,4)$	$(4,6)$	$(6,10)$	$(10,12)$
Signo $N'(t)$	$+$	-	-	$+$
$N(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $N(t)$ es *creciente* en $(0,4) \cup (10,12)$ y *decreciente* en $(4,10)$, y tiene un *mínimo relativo*, que es también *absoluto*, en $(10,8)$ y un *máximo relativo*, que es también *absoluto*, en $(4,28)$.
Por lo tanto el máximo número de vehículos vendidos es de 28 el cuarto mes y el mínimo de 8 el décimo mes.

b) Representamos la función con los datos obtenidos en el apartado anterior



c) Como la primera rama parte en $(0,12)$, crece hasta $(4,28)$ y decrece hasta $(6,24)$ en dicha rama no habrá ningún intervalo por debajo de 12 ventas. Buscamos por tanto en la segunda rama:

$$N(t) = (t-10)^2 + 8 \leq 12 \implies t^2 - 20t + 96 \leq 0 \implies (t-8)\cdot(t-12) \leq 0$$

	$(6,8)$	$(8,12)$
Signo $N(t)$	$+$	-

Por lo tanto el número de vehículos vendidos es menor que 12 en el intervalo $(8,12)$, es decir, entre el octavo y el décimo segundo mes.

Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Considérese la siguiente función:

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales.

a) Calcular a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0,16)$.

b) Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c \quad \& \quad f'(x) = 3ax^2 - 4x + b \quad \& \quad f''(x) = 6ax - 4$$

a)
- `Pasa por` $(2,8)$`:` $f(2) = 8 \implies 8a - 8 + 2b + c = 8 \xRightarrow[c=16]{b=0} \boxed{a=0}$
- `Pasa por` (0.16)`:` $f(0) = 16 \implies \boxed{c = 16}$
- `E. rel. en` $x = 0$`:` $f'(0) = 0 \implies \boxed{b=0}$

Comprobamos que hay un extremo relativo en $x = 0 \implies f''(0) = -4 \neq 0$ ✓

b) Hallamos el área comprendida entre $f(x) = -2x^2 + 16$ y $g(x) = 8$. El corte de ambas será: $f(x) = g(x) \implies -2x^2 + 16 = 8 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$, lo que define un único recinto de integración $A_1 : (-2, 2)$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{2} \left(-2x^2 + 8\right) dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x\Bigg]_{-2}^{2}$$
$$= \left(-\frac{16}{3} + 16\right) - \left(\frac{16}{3} - 16\right) = \frac{64}{3}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{64}{3} \simeq 21.33\ u^2$$

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

Se estima que en una población el 20 % padece obesidad y que el 11 % padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27.5 % de los hipertensos padecen obesidad.

a) ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?

b) ¿Son independientes los sucesos "padecer obesidad" y "ser hipertensos"?

c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

Sean los sucesos:

$$O \equiv \text{"El individuo padece obesidad"}$$
$$H \equiv \text{"El individuo es hipertenso"}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(O) = 0.2 \qquad \& \qquad P(O \cap H) = 0.11 \qquad \& \qquad P(O \mid H) = 0.275$$

a) $P(O \mid H) = \dfrac{P(O \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0.11}{P(H)} = 0.275 \Longrightarrow P(H) = 0.4$

$P(O \cup H) = P(O) + P(H) - P(O \cap H) = 0.2 + 0.4 - 0.11 \Rightarrow \boxed{P(O \cup H) = 0.49 \Rightarrow 49\,\%}$

b) $\left.\begin{array}{l} P(O) \cdot P(H) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08 \\ P(O \cap H) = 0.11 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} P(O \cap H) \neq P(O) \cdot P(H) \\ \text{los sucesos } O \text{ y } H \\ \text{no son independientes} \end{array}\right.$

c) $P(H \mid \overline{O}) = \dfrac{P(H \cap \overline{O})}{P(\overline{O})} = \dfrac{P(H) - P(H \cap O)}{1 - P(O)} = \dfrac{0.4 - 0.11}{1 - 0.2} \Rightarrow \boxed{P(H \mid \overline{O}) = 0.3625}$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.

a) Si en una muestra de 25 *empleados, el tiempo medio necesario fue de* 97 *horas, calcule un intervalo de confianza con un* 95 % *de confianza para la media del tiempo de formación precisado.*

b) Si la media del tiempo de formación precisado es $\mu = 97$ *horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de* 36 *trabajadores se encuentre entre* 90 *y* 104 *horas?*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de formación del empleado (horas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 15)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 97 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{25}} = 5.88$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (91.12; 102.88)}$$

b) $X : \mathcal{N}(97, 15) \xrightarrow{n=36} \overline{X} : \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n}) = \mathcal{N}(97, 2.5)$

$$\begin{aligned} P(90 \le \overline{X} \le 104) &= P\left(\frac{90-97}{2.5} \le Z \le \frac{104-97}{2.5}\right) = P(-2.8 \le Z \le 2.8) \\ &= P(Z \le 2.8) - P(Z \le -2.8) = P(Z \le 2.8) - P(Z \ge 2.8) \\ &= P(Z \le 2.8) - [1 - P(Z \le 2.8)] = 2 \cdot P(Z \le 2.8) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9974 - 1 = 0.9948 \end{aligned}$$