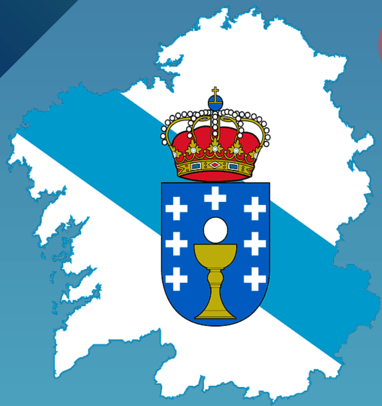
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (3.33 *puntos*)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}$$

a) Calcule para qué valor de k no existe la matriz inversa de A.

b) Justifique cuál es el rango de A si $k = -5$.

c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para $k = -2$.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

a) $|A| = -3k - 15 = 0 \implies k = -5 \implies \nexists\, A^{-1}\ \forall\, k = -5$

b) Si $k = -5 \implies |A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

c) Para $k = -2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -3 \cdot (-2) - 15 = -9$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (3.33 *puntos*)

Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

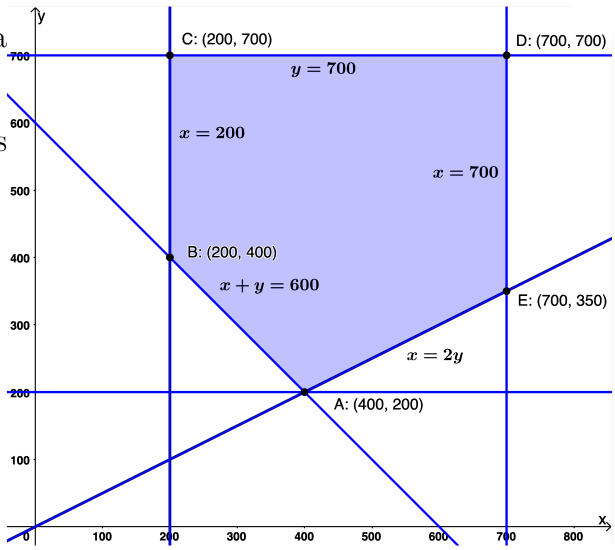
c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tela del proveedor A (m)"
  $y \equiv$ "Tela del proveedor B (m)"
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación
-
$$\begin{cases} (1)\ x \geq 200 & \rightarrow (200,0) \\ (2)\ y \geq 200 & \rightarrow (200,0) \\ (3)\ x \leq 700 & \rightarrow (0,700) \\ (4)\ y \leq 700 & \rightarrow (0,700) \\ (5)\ x + y \geq 600 & \rightarrow (0,600) \quad \& \quad (600,0) \\ (6)\ x \leq 2y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (200,400) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 2x + 3y$ (euros)
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	400	200	1400
B	200	400	1600
C	200	700	2500
D	700	700	3500
E	700	350	2450

El *coste mínimo* es de 1400 € y se obtienen con 400 m de tela del proveedor A y 200 m de tela del proveedor B.

Ejercicio 3 (3.33 *puntos*)

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto $P(4, 16)$.

a) Calcule los valores de a, b, c.

b) Realice la representación gráfica de la función $f(x)$ y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \& \qquad f'(x) = 2ax + b \qquad \& \qquad f''(x) = 2a$$

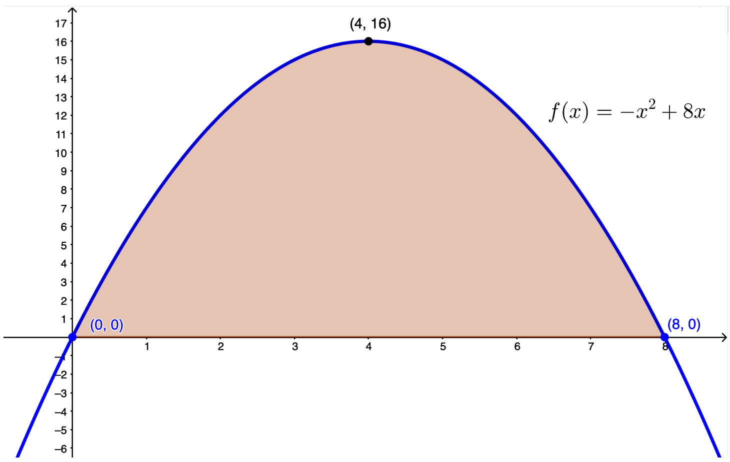
a)
- `Pasa por` $(0, 0)$: $f(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{c = 0}$
- `Pasa por` $(4, 16)$: $f(4) = 16 \Longrightarrow 16a + 4b + c = 16 \xrightarrow{c=0} \odot\ 4a + b = 4$
- `Máximo en` $x = 4$: $f'(4) = 0 \Longrightarrow \circledast\ 8a + b = 0$

$$\begin{cases} \odot\ 4a + b = 4 \\ \circledast\ 8a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a = -1 \\ b = 8 \end{array}} \Longrightarrow f(x) = -x^2 + 8x$$

Comprobamos máximo en $(4, 16) \Longrightarrow f''(4) = 2a = -2 < 0 \xrightarrow{(\cap)}$ Máx en $x = 4$ ✓

b) $f(x) = -x^2 + 8x$ es una parábola *cóncava* $(\cap)$ con vértice en $(4, 16)$ y cortes con los ejes en $(0, 0)$, $(8, 0)$.

$$\text{Área} = \int_0^8 f(x)\,dx = \int_0^8 (-x^2 + 8x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 4x^2 \Big]_0^8 = \left(-\frac{512}{3} + 256\right) - 0$$
$$= \frac{256}{3} \simeq 85.33\ u^2$$



Ejercicio 4 (3.33 *puntos*)

Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x:

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \le x \le 30$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11.25 euros por unidad.

a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.

b) ¿Cómo debe planficarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

a)
- $I(x) = x \cdot P(x) = x \cdot \left(-\frac{x^2}{20} + x + 55\right) = -\frac{x^3}{20} + x^2 + 55x, \quad 0 \le x \le 30$
- $C(x) = 80 + 11.25x, \quad 0 \le x \le 30$
- $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{x^3}{20} + x^2 + 55x - (80 + 11.25x) = -\frac{x^3}{20} + x^2 - 43.75x - 80$

b) $B'(x) = -\frac{3x^2}{20} + 2x - 43.75 \implies B'(x) = -3x^2 + 40x - 875 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = -35/3} \\ x = 25 \end{cases}$

$B''(x) = -\frac{3x}{10} + 2 \implies B''(25) = -5.5 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Máximo relativo en $x = 25$

Por lo tanto, como $B(0) = -80$ y $B(30) = 782.5$, el máximo beneficio se produce con un nivel de ventas de 25 unidades a un precio de $P(25) = 48.75$ € y asciende a $B(25) = 857.5$ €.

Ejercicio 5 (3.33 *puntos*)

En una encuesta el 80 % de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35 % hace las dos cosaas y el 60 % no lee.
Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:

a) Escuche música y no lea.

b) Lea y no escuche música.

c) Haga solamente una de las dos cosas.

d) ¿Son independientes los sucesos "escuchar música" y "leer"? Justifique la respuesta.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

Sean los sucesos:

$$L \equiv \text{"El entrevistado lee"}$$
$$M \equiv \text{"El entrevistado escucha música"}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(L \cup M) = 0.8 \quad \& \quad P(L \cap M) = 0.35 \quad \& \quad P(\overline{L}) = 0.6 \implies P(L) = 1 - 0.6 = 0.4$$

a) $P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) \Rightarrow 0.8 = 0.4 + P(M) - 0.35 \implies P(M) = 0.75$

$$P(M \cap \overline{L}) = P(M) - P(M \cap L) = 0.75 - 0.35 \implies \boxed{P(M \cap \overline{L}) = 0.4}$$

b) $P(L \cap \overline{M}) = P(L) - P(L \cap M) = 0.4 - 0.35 \implies \boxed{P(L \cap \overline{M}) = 0.05}$

c) $P\Big((L \cap \overline{M}) \cup (\overline{L} \cap M)\Big) = P(L \cap \overline{M}) + P(\overline{L} \cap M) = 0.05 + 0.4 = 0.45$

d) $$\left.\begin{array}{l} P(L) \cdot P(M) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3 \\ P(L \cap M) = 0.35 \end{array}\right\} \implies \left|\begin{array}{c} P(L \cap M) \neq P(L) \cdot P(M) \\ \text{los sucesos } L \text{ y } M \\ \text{no son incompatibles} \end{array}\right.$$

Ejercicio 6 (3.33 *puntos*)

La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de $\sigma = 6$ centímetros.

a) Calcule un intervalo del 98 % de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.

b) Si la longitud media de los listones producidos es de $\mu = 244$ centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de $n = 16$ listones sea inferior a 242 centímetros?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

$$X \equiv \text{“Longitud de los listones de madera (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 6)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 6) \xrightarrow{n=9} \overline{x} = 244 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.98$

$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{9}} = 4.65$

$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (239.35; 248.65)}$

b) $X : \mathcal{N}(244, 6) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n}) = \mathcal{N}(244, 1.5)$

$$P(\overline{X} \leq 242) = P\Big(Z \leq \frac{242 - 244}{1.5}\Big) = P(Z \leq -1.33) = P(Z \geq 1.33)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$