

MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2026

- Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Junio 2026 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2 puntos)

En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A , B y C . La población de cada especie en el mes k viene dada por a_k , b_k y c_k , respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k + 1$ y en el mes anterior, k :

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \text{ con } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (0.5 puntos) Si en el instante inicial $k = 0$ hay 100 ejemplares de la especie A , 124 de la especie B y 234 de la especie C , ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después?

b) (0.5 puntos) Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

donde a_0 , b_0 y c_0 son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial.

c) (1 punto) Calcula M^k con $k \in \mathbb{N}$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo?

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción Única)

Solución.

a) Para $k = 0 \implies \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 124 & 234 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^2 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 124 \\ 234 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 124 \\ 234 \end{pmatrix} \implies \boxed{\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 324 \\ 434 \end{pmatrix}}$$

b) Hipótesis de inducción: $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

Paso inductivo: $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M \cdot M^k \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{k+1} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ q.e.d.

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M \cdot M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 124 \\ 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 124 + 100k \\ 234 + 100k \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la población de A se mantiene estable en 100 individuos, mientras que las de B y C se ven incrementadas en 100 individuos cada año.

————— o —————

Ejercicio 2 (2 puntos)

Sea $f(x)$ una función continua definida en $[0, +\infty)$ tal que $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$, y $f(1) = 2e - 2$.

- a) (1 punto) Calcula $f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- b) (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . Justifica que $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción Única)

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ dx = 2\sqrt{x} du \end{array} \right\} = \int \frac{e^u}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}} du \\ &= 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

$$f(1) = 2e - 2 \implies 2e + C = 2e - 2 \implies C = -2 \implies \boxed{f(x) = 2e^{\sqrt{x}} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2e^{\sqrt{x}} - 2) = 2 - 2 = 0$$

- b) $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} > 0 \forall x > 0$, por lo que la función $f(x)$ es *monótona creciente* en su dominio. Como además $f(0) = 0$, esto implica que la función $f(x) \geq 0 \forall x \geq 0$ q.e.d.

————— o —————

Ejercicio 3 (2 puntos)

Sean los planos $\pi \equiv x - 2y + 4z + 1 = 0$ y $\pi_d \equiv 2x - 3y + 6z = d$, con $d \in \mathbb{R}$.

- a) (1 punto) ¿Hay algún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten?
- b) (1 punto) Calcula, para $d = -2$, los puntos de corte entre los planos π y π_d .

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción Única)

Solución.

a) $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-3} = \frac{4}{6} \implies \pi$ y π_d se cortan $\forall d \in \mathbb{R}$.

b) Si $d = -2$ los planos se cortan en la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 4z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 6z + 2 = 0 \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4A (2 puntos)

Para una prueba de Bachillerato se ha preparado un cuestionario tipo test de 4 preguntas con 5 respuestas posibles a cada pregunta. Cada pregunta correctamente respondida suma 2.5 puntos. Por cada respuesta incorrecta se restan 0.625 puntos. Si no se contesta a la pregunta, se puntúa con 0.

- a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de sacar sobresaliente (nota mayor o igual a 9) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?
- b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de suspender (nota menor que 5) contestando las cuatro preguntas aleatoriamente?

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de preguntas correctas de entre las 4" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(4, 1/5) = \mathcal{B}(4, 0.2)$

Para sacar una nota igual o superior a 9 respondiendo todas las preguntas solo cabe la posibilidad de que acierte todas, pues en el caso de fallar una solo podría obtener $3 \cdot 2.5 - 0.625 = 6.875$ puntos.

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^0 = 0.0016$$

- b) Contestando las cuatro preguntas, suspenderá si acierta menos de 3, ya que con 3 aciertos hemos visto que la nota sería un 6.875 puntos, mientras que con 2 aciertos la nota obtenida sería $2 \cdot 2.5 - 2 \cdot 0.625 = 3.75$ puntos, suspendiendo el examen.

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= 1 - P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 3) + P(X = 4)] = 1 - \binom{4}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8 + 0.0016 \\ &= 1 - 0.0272 = 0.9728 \end{aligned}$$

Ejercicio 4B (2 puntos)

En un hospital se realizan dos técnicas diferentes de intervención para una misma lesión. Se muestra en la siguiente tabla el número de intervenciones realizadas en los últimos años clasificadas por tipo de técnica y gravedad de la lesión antes de la intervención:

	Nº intervenciones	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	44	140
Leves	136	40

En la tabla siguiente se muestra el número de intervenciones que fueron efectivas ante la lesión:

	Nº intervenciones efectivas	
	Técnica 1	Técnica 2
Graves	30	102
Leves	120	36

- a) (0.5 puntos) Se elige al azar el expediente de una intervención realizada en el hospital para esta lesión. Sabiendo que la intervención ha sido efectiva, ¿cuál de las dos técnicas es más probable que se haya usado?
- b) (1 punto) Con los datos anteriores, un cirujano del hospital quiere elegir la técnica que le proporcione mayor probabilidad de éxito. ¿Qué técnica elegirá para una lesión leve?, ¿y para una lesión grave?
- c) (0.5 puntos) El protocolo del hospital cuando se desconoce la gravedad de la lesión es aplicar la técnica 1. Justifica por qué este protocolo no es el más adecuado.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$T_i \equiv$ "Operado con la técnica i "

$G \equiv$ "La lesión es grave"

$L \equiv$ "La lesión es leve"

$E \equiv$ "La intervención es efectiva"

$$a) P(T_1 | E) = \frac{150}{288} = \frac{25}{48} \simeq 0.5208 \quad \& \quad P(T_2 | E) = \frac{138}{288} = \frac{23}{48} \simeq 0.4792$$

Luego es más probable que la intervención se haya realizado con la técnica 1.

Intervenciones Efectivas

	T_1	T_2	Total
G	30	102	132
L	120	36	156
Total	150	138	288

b) Hacemos ahora dos tablas para las lesiones leves y graves

Lesiones Leves				Lesiones Graves			
	T_1	T_2	Total		T_1	T_2	Total
E	120	36	156	E	30	102	132
Total	136	40	176	Total	44	140	184

$$P(E | T_1 \cap L) = \frac{120}{136} \simeq 0.8824 \quad \& \quad P(E | T_2 \cap L) = \frac{36}{40} \simeq 0.9$$

$$P(E | T_1 \cap G) = \frac{30}{44} \simeq 0.6818 \quad \& \quad P(E | T_2 \cap G) = \frac{102}{140} \simeq 0.7286$$

Tanto para las lesiones leves como para las graves es más efectiva la técnica 2.

c) Hacemos una tabla con el total de las intervenciones

Intervenciones			
	T_1	T_2	Total
E	150	138	288
Total	180	180	360

$$P(E | T_1) = \frac{150}{180} \simeq 0.8333 \quad \& \quad P(E | T_2) = \frac{138}{180} \simeq 0.7667$$

Luego si se desconoce la gravedad de la lesión parece que la técnica más efectiva es la 1. No obstante tal y como se ha visto en el apartado anterior, la técnica 2 es más recomendable para ambos tipos de lesiones.

_____ o _____

Ejercicio 5A (2 puntos)

En un archivo de la universidad se están digitalizando los expedientes allí almacenados. La universidad dispone de 70 archiveros que pueden realizar el trabajo y de un número limitado de equipos informáticos. Inicialmente se crea un equipo de trabajo con 50 archiveros. Se ha observado que cada uno de los integrantes de ese equipo digitaliza 80 expedientes mensualmente y que por cada archivero más que se añada al equipo, se reduce en uno los expedientes que digitaliza cada archivero al mes. Determina el número de archiveros que deben formar el equipo para que el número de expedientes digitalizados al mes sea máximo.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción A)

Solución.

Sea $x \equiv$ "Nº de archiveros adicionales al equipo inicial de 50" con $0 \leq x \leq 20$, y sea $f(x)$ la función que determina el número de expedientes mensuales digitalizados, calculados como el producto de los archivos mensuales digitalizados por cada archivero por el número de archiveros.

$$f(x) = (80 - x) \cdot (50 + x) = -x^2 + 30x + 4000$$

$$f'(x) = -2x + 30 = 0 \implies x = 15$$

$$f''(x) = -2 \implies f''(15) = -2 < 0 \stackrel{(3)}{\implies} \text{Máximo en } x = 15$$

Luego el número de archiveros que maximiza los archivos digitalizados es de $50 + x = 65$, consiguiendo digitalizar $f(15) = 4225$ archivos mensuales.

_____ o _____

Ejercicio 5B (2 puntos)

$$\text{Calcula } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{1 - \cos x}.$$

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2026 - Opción B)

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{1 - \cos x} &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \cdot \cos x - e^x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x) - e^x}{\cos x} \\ &= \frac{1 \cdot (1 - 0) - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

_____ o _____