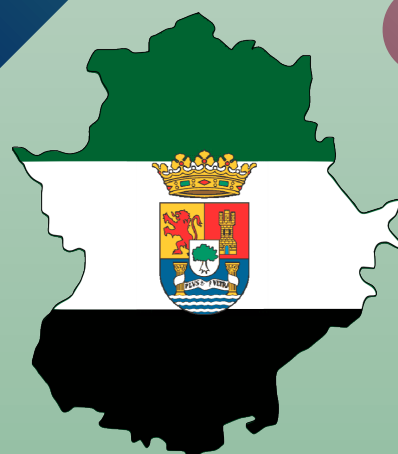


# MATEMATICAS CCSS EXAMENES RESUELTOS



## EVAU JUNIO 2024 - Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio





# Junio 2024 (Ordinario)

## Ejercicio 1 (2 puntos)

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz  $X$  que verifique la ecuación matricial  $3X - 2I = B^T - AX$ , siendo  $B^T$  la matriz traspuesta de  $B$ . Justifique la respuesta.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

**Solución.**

$$3X - 2I = B^T - AX \implies 3X + AX = B^T + 2I \implies (3I + A) \cdot X = B^T + 2I$$

$$\underbrace{(3I + A)^{-1} \cdot (3I + A)}_I \cdot X = (3I + A)^{-1} \cdot (B^T + 2I) \implies X = (3I + A)^{-1} \cdot (B^T + 2I)$$

$$3I + A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad (3I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^T + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = (3I + A)^{-1} \cdot (B^T + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

## Ejercicio 2 (2 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

- (1.5 puntos) Determinar para qué valores de  $x$  existe la inversa de  $A \cdot B^T + 3C$ , siendo  $B^T$  la matriz traspuesta de la matriz  $B$ .
- (0.5 puntos) Calcular la inversa de  $A \cdot B^T$  para  $x = 1$ .

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

### Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cdot B^T + 3C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3x & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|A \cdot B^T + 3C| = -2 - x \neq 0 \implies x \neq -2 \implies \exists (A \cdot B^T + 3C)^{-1} \forall x \neq -2$$

$$\text{b) } A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2x & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{x=1} A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad (A \cdot B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 3 (2 puntos)

Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

#### Solución.

Sean las incógnitas:

$x \equiv$  "Duración de la etapa de lavado"

$y \equiv$  "Duración de la etapa de aclarado"

$z \equiv$  "Duración de la etapa de centrifugado"

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ y = 2z \\ y + z = \frac{x}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 90 \\ y - 2z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left[ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -90 \end{array} \right) \\ & \sim \left[ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -90 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x + 20 + 10 = 90 \\ y - 2 \cdot 10 = 0 \\ -9z = -90 \end{cases} \implies \boxed{\begin{matrix} x = 60 \\ y = 20 \\ z = 10 \end{matrix}}$$

Por lo tanto la etapa de lavado dura 60 minutos, la de aclarado 20 minutos y la de centrifugado 10 minutos.

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 4 (2 puntos)

Una almazara pequeña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

#### Solución.

- **Incógnitas:**  $x \equiv$  "Aceite virgen extra (miles de  $\ell$ )"  
 $y \equiv$  "Aceite de orujo (miles de  $\ell$ )"
- **Restricciones:** Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

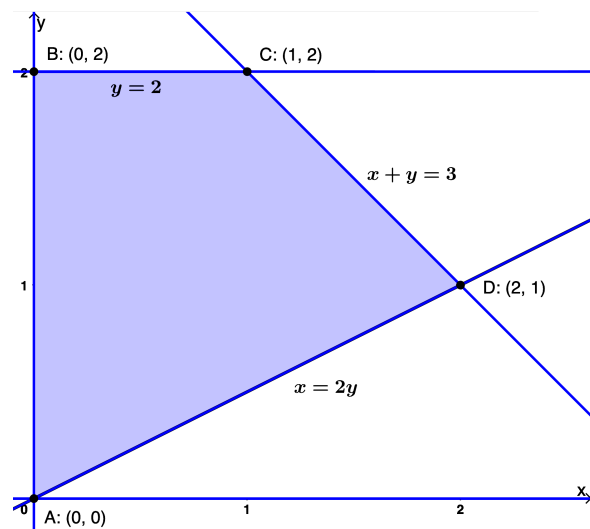
$$\begin{cases} \textcircled{1} x + y \leq 3 & \rightarrow (0, 3) \quad \& \quad (3, 0) \\ \textcircled{2} y \leq 2 & \rightarrow (0, 2) \\ \textcircled{3} x \leq 2y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (2, 1) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- **Función objetivo**  $f(x, y) = 10x + 7y$  (miles de €)

- **Región factible** Representamos la región y calculamos los vértices.

- **Optimización de F.O.** Evaluamos  $f(x, y)$  en cada vértice

Punto	$x$	$y$	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	2	14
C	1	2	24
D	2	1	27



El ingreso máximo es de 27000 euros produciendo 2000 litros de aceite virgen extra y 1000 litros de aceite de orujo.

○

### Ejercicio 5 (2 puntos)

El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte  $C(t)$ , depende del tiempo transcurrido desde principios de año,  $t$  en meses, según la función:

$$C(t) = \begin{cases} t^2 - 3Bt + 2A & , \text{ si } 1 \leq t < 4 \\ Bt & , \text{ si } 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

Determinar, razonando la respuesta, las constantes  $A$  y  $B$  sabiendo que la función  $C(t)$  es continua y que el consumo en el mes 3 es de 7 mil litros.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

### Solución.

- Si  $t \neq 4$  la función  $C(t)$  es continua pues las ramas son polinomios
- Si  $t = 4$

- $\lim_{t \rightarrow 4^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 4^-} (t^2 - 3Bt + 2A) = 16 - 12B + 2A$
- $\lim_{t \rightarrow 4^+} C(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} Bt = 4B$
- $C(4) = 4B$

$$C(t) \text{ cont. en } t = 4 \iff \lim_{t \rightarrow 4} C(t) = C(4) \Rightarrow 16 - 12B + 2A = 4B \Rightarrow \odot A = 8B - 8$$

- $C(3) = 7 \Rightarrow 9 - 9B + 2A = 7 \Rightarrow 2A - 9B = -2 \xrightarrow{\odot A=8B-8} \begin{cases} A = 8 \\ B = 2 \end{cases}$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 6 (2 puntos)

La producción de un árbol frutal,  $P(x)$  en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua,  $x$  en litros, con la que se riega de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \quad 0 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

- (1.5 puntos) Determinar para qué cantidades de agua se alcanzan las producciones máxima y mínima del árbol y a cuánto ascienden estas producciones.
- (0.5 puntos) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

### Solución.

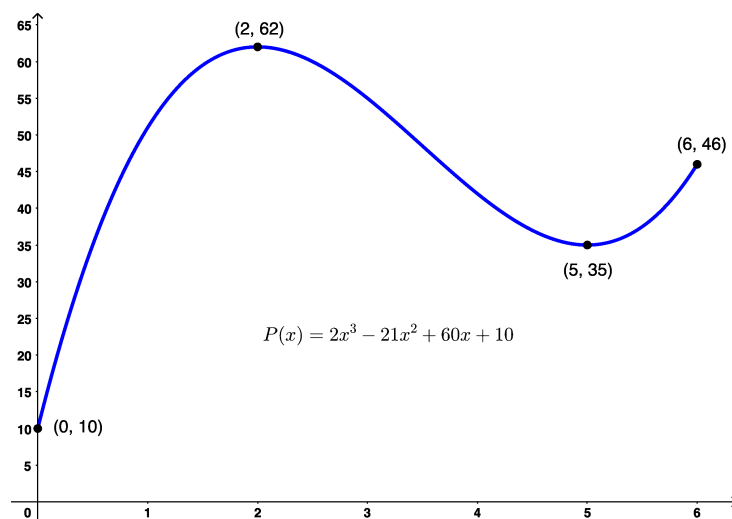
a)  $P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \implies x = \{2, 5\}$

	(0, 2)	(2, 5)	(5, 6)
Signo $P'(x)$	+		+
$P(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

La producción de fruta  $P(x)$  es *creciente* en  $(0, 2) \cup (5, 6)$  y *decreciente* en  $(2, 5)$ , y tiene un *mínimo relativo* en  $(5, 35)$  y un *máximo relativo* en  $(2, 62)$ .

Como  $C(0) = 10$  y  $C(6) = 46$ , podemos concluir que la producción mínima es de 10 kg, cuando no se riega el árbol ( $x = 0$ ), mientras que la máxima es de 62 kg con 2 litros de agua.

- b) Representamos la función con los datos obtenidos en el apartado anterior:



### Ejercicio 7 (2 puntos)

Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

#### Solución.

■ Dominio:  $x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x = \{2, 3\} \implies \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

■ A. Vertical:  $\exists A.V.$  en  $x = 3$ . En  $x = 2$  hay un agujero.

•  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)} \cdot (x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot (x-1)}{x-3} = -2$

•  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[ \frac{6}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \left[ \frac{6}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \left[ \frac{6}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$

■ A. Horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \implies \nexists A.H.$

■ A. Oblicua:  $\exists A.O.$  en  $y = x + 2$

•  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{1} = 1$

•  $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} - x \right)$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - (x^3 - 5x^2 + 6x)}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = 2$

○

### Ejercicio 8 (2 puntos)

Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

### Solución.

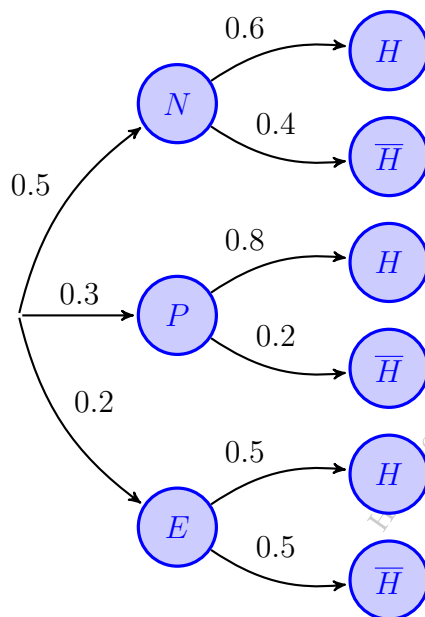
Sean los sucesos:

$N \equiv$  "El libro es una novela"

$E \equiv$  "El libro es un ensayo"

$P \equiv$  "El libro es un poema"

$H \equiv$  "El autor es hispanohablante"



$$\text{a) } P(N \cap \bar{H}) = P(N) \cdot P(\bar{H} | N) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(H) &= P((N \cap H) \cup (P \cap H) \cup (E \cap H)) \\ &= P(N \cap H) + P(P \cap H) + P(E \cap H) \\ &= P(N) \cdot P(H | N) + P(P) \cdot P(H | P) \\ &\quad + P(E) \cdot P(H | E) = 0.5 \cdot 0.6 \\ &\quad + 0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.64 \end{aligned}$$

### Ejercicio 9 (2 puntos)

En una carretera se han instalado dos radares  $A$  y  $B$ . En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar  $A$  sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar  $B$  detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por  $A$  o por  $B$ ). Se pide, razonando las respuestas:

- (1 punto) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar  $A$  y por el radar  $B$ .
- (1 punto) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar  $A$ , ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar  $B$ ?

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

### Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$  "El coche ha sido detectado por el radar  $A$ "

$B \equiv$  "El coche ha sido detectado por el radar  $B$ "

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.8 \quad \& \quad P(B) = 0.85 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.95$$

$$\text{a) } P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.8 + 0.85 - 0.95 \implies P(A \cap B) = 0.7$$

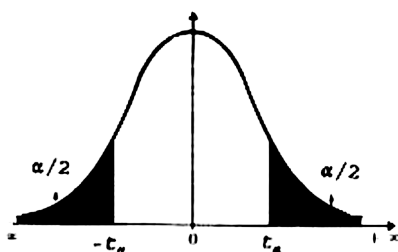
$$\text{b) } P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.7}{0.8} \implies P(B | A) = 0.875$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 10 (2 puntos)

En una asociación cultural hay 4000 personas entre 18 y 30 años, 5000 entre 30 y 60 años y 1000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

- a) (1 punto) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad?
- b) (1 punto) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival.



$\alpha$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	*	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

### Solución.

- a) Hacemos el reparto proporcional para las  $4000 + 5000 + 1000 = 10000$  personas de la asociación

- Entre 18 y 30 años:  $4000 \cdot \frac{500}{10000} = 200$  encuestas
- Entre 30 y 60 años:  $5000 \cdot \frac{500}{10000} = 250$  encuestas
- Mayores de 60 años:  $1000 \cdot \frac{500}{10000} = 50$  encuestas

b)  $n = 250$  &  $\hat{p} = \frac{150}{250} = 0.6$  &  $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.4$  &  $1 - \alpha = 0.99$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 2.576$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{250}} = 0.0798$$

$$I.C._{99\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \Rightarrow I.C._{99\%}(p) = (0.5202; 0.6798)$$

○