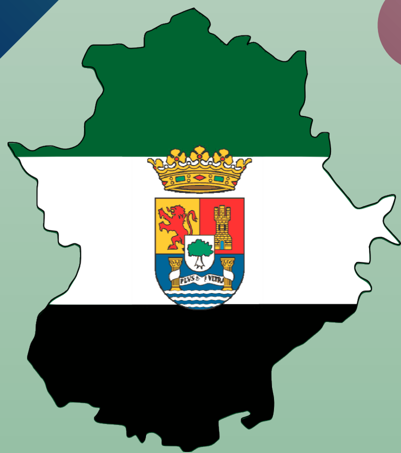
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo I la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A \cdot X + I = B \\ 2X + Y = B \end{cases}$$

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

$$\begin{cases} A \cdot X + I = B \Rightarrow A \cdot X = B - I \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (B - I) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot (B - I)} \\ 2X + Y = B \implies \boxed{Y = B - 2X} \end{cases}$$

$$|A| = -1 \quad \& \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot (B - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$Y = B - 2X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo I la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

a) (1 punto) Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A \cdot B^{\top}$ tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x = -1$, calcular la matriz Y tal que $\left(A \cdot B^{\top}\right) \cdot Y = 2I$

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

a) $A{\cdot}B^{\top}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}{\cdot}\begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{\top}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}{\cdot}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 2x-2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left|A\cdot B^{\top}\right|=3\cdot(x-1)-(2x-2)=x-1\neq 0 \implies x\neq 1 \implies \exists (A\cdot B^{\top})^{-1}\ \forall x\neq 1$$

b) Para $x=-1$ tenemos:

$$A{\cdot}B^{\top}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad \left|A\cdot B^{\top}\right|=-1-1=-2 \quad \& \quad (A{\cdot}B^{\top})^{-1}=\begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A\cdot B^{\top}\right)\cdot Y=2I \implies \underbrace{\left(A\cdot B^{\top}\right)^{-1}\cdot\left(A\cdot B^{\top}\right)}_{I}{\cdot}Y=\left(A\cdot B^{\top}\right)^{-1}\cdot 2I$$

$$\implies Y=2\cdot\left(A\cdot B^{\top}\right)^{-1}=2\cdot\begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{Y=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierto día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de carteras vendidas”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de bolsos vendidos”}$$
$$z \equiv \text{“N}^{\underline{\text{o}}}\text{ de mochilas vendidas”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ x=y+2z \\ 10x+15y+20z=450 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=35 \\ x-y-2z=0 \\ 2x+3y+4z=90 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 90 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & -2 & -3 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & -2 & -3 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+10+5=35 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y-3\cdot 5=-35 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z=5 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=20 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}}$$

Por lo tanto el artesano ha vendido 20 carteras, 10 bolsos y 5 mochilas.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

	Lote A	Lote B	Restricción
Chorizos	6	10	≤ 390
Salchichones	6	16	≤ 480

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de lotes tipo A vendidos"
  $y \equiv$ "Nº de lotes tipo B vendidos"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

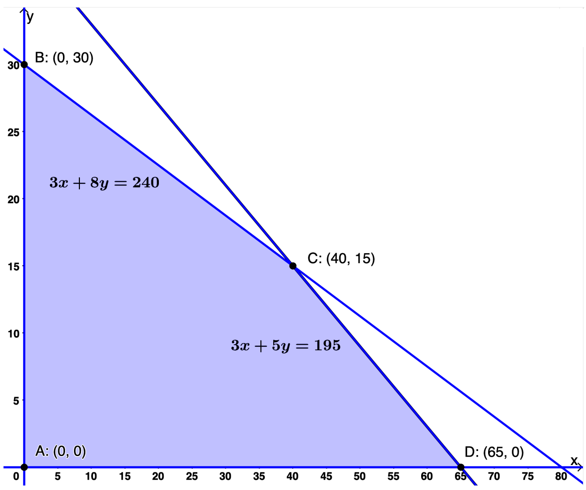
$$\begin{cases} ① \ 6x + 10y \leq 390 \\ ② \ 6x + 16y \leq 480 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \ 3x + 5y \leq 195 & \to (0,39) \quad \& \quad (65,0) \\ ② \ 3x + 8y \leq 240 & \to (0,40) \quad \& \quad (80,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 20x + 36y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	30	1080
C	40	15	1340
D	65	0	1300



El *beneficio máximo* es de 1340 euros vendiendo 40 lotes tipo A y 15 tipo B.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, $B(x)$ en días, depende de la cantidad de dinero, x en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x) = \begin{cases} -x^2 + 3Ax + 3B & , \text{si } 0 \leq x < 4 \\ -x + 39 & , \text{si } 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocuapación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

- Si $x \neq 4$ la función $N(x)$ es continua pues las ramas son polinomios.
- Si $x = 4$
  - $\lim\limits_{x \to 4^-} N(x) = \lim\limits_{x \to 4}(-x^2 + 3Ax + 3B) = -16 + 12A + 3B$
  - $\lim\limits_{x \to 4^+} N(x) = \lim\limits_{x \to 4}(-x + 39) = 35$
  - $N(4) = -4 + 39 = 35$

  $N(x)$ es continua $x = 4 \iff \lim\limits_{x \to 4} N(x) = N(4) \implies -16 + 12A + 3B = 35$

  $\implies \odot\ 4A + B = 17$
- $N(3) = 36 \implies -9 + 9A + 3B = 36 \implies \circledast\ 3A + B = 15$

$$\begin{array}{lcr} \odot\ 4A + B = 17 & \longrightarrow & -4A - \cancel{B} = -17 \\ \circledast\ 3A + B = 15 & \xrightarrow{\times(-1)} & 3A + \cancel{B} = 15 \\ \hline & & -A = -2 \implies \boxed{A = 2} \end{array}$$

$$3A + B = 15 \implies 3 \cdot 2 + B = 15 \implies \boxed{B = 9}$$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x, que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \quad 1 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) (1.5 puntos) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y el mínino de dicha bebidad y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo.

b) (0.5 puntos) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

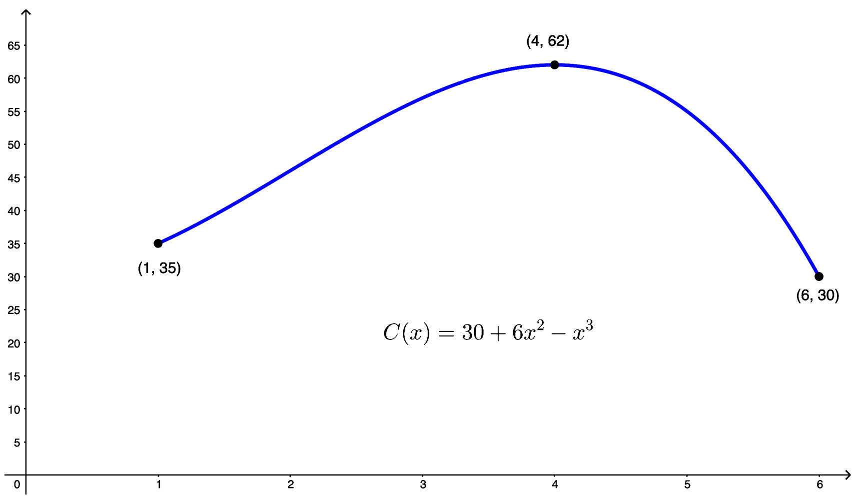
Solución.

a) $C'(x) = 12x - 3x^2 = 3x \cdot (4 - x) = 0 \implies x = 20$ y $\cancel{x = 0}$ (absurda)

	$(1,4)$	$(4,6)$
Signo $C'(x)$	$+$	-
$C(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

El consumo de la bebida $C(x)$ es *creciente* en $(1,4)$ y *decreciente* en $(4,6)$, y tiene un *máximo relativo* que en nuestro caso también es *absoluto* en $(4,62)$, es decir de 62 litros anuales por persona con una cantidad de aditivo de 4 gramos.
Como $C(1) = 35$ y $C(6) = 30$, el consumo mínimo será de 30 litros de bebida al año con una cantidad de aditivo de 6 gramos.

b) Representamos el consumo de bebida en función del contenido de aditivo con los datos del apartado anterior.



Ejercicio 7 (2 *puntos*)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 1$ y el eje OX entre los valores $x = -2$ y $x = 3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

Hallamos el corte con $OX \implies f(x) = -x^2 + 1 = 0 \implies x = \pm 1$, que junto con las rectas $x = -2$ y $x = 3$ define tres recintos de integración $A_1 : (-2, -1)$, $A_2 : (-1, 1)$ y $A_3 : (1, 3)$

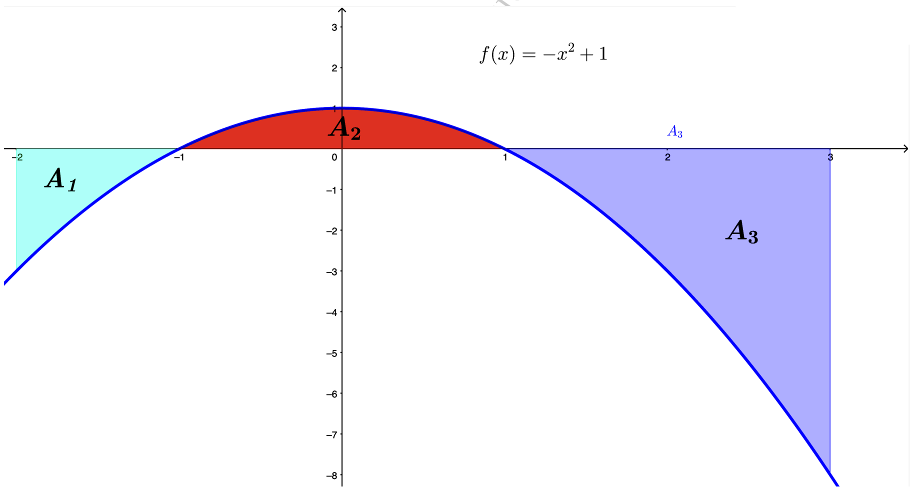
$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (-x^2 + 1)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x + C$$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = F(-1) - F(-2) = \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 2\right) = -\frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-1) = \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} f(x)\,dx = F(3) - F(1) = (-9 + 3) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{20}{3}$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} \simeq 9.33\ u^2$$



Ejercicio 8 (2 *puntos*)

Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50 %), laborales (30 %) y comerciales (20 %). Los usuarios atienden adecuadamente un 60 % de las llamadas personales, un 90 % de las laborales y un 20 % de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente.

b) (1 punto) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial.

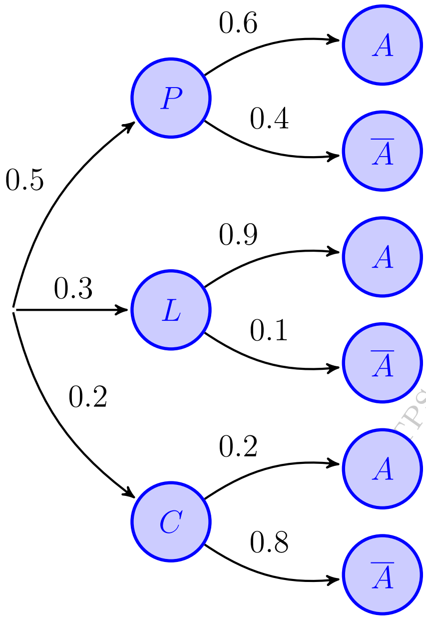
(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

Sean los sucesos:

$P \equiv$ "La llamada es personal" $\quad L \equiv$ "La llamada es laboral"

$C \equiv$ "La llamada es comercial" $\quad A \equiv$ "La atención de la llamada es adecuada"



a) $P(\overline{A}) = P\big((P\cap\overline{A})\cup(L\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{A})\big)$

$$= P(P\cap\overline{A}) + P(L\cap\overline{A}) + P(C\cap\overline{A})$$
$$= P(P)\cdot P(\overline{A}\mid P) + P(L)\cdot P(\overline{A}\mid L)$$
$$+ P(C)\cdot P(\overline{A}\mid C) = 0.5\cdot 0.4$$
$$+ 0.3\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.8 = 0.39$$

b) $P(C\mid A) = \dfrac{P(C\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(C)\cdot P(A\mid C)}{1-P(\overline{A})}$

$$= \frac{0.2\cdot 0.2}{1-0.39} = 0.0656$$

Ejercicio 9 (2 *puntos*)

Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75 % de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20 % contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro?

b) (1 punto) Si el 90 % de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo?

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“El producto contratado es conservador”}$$
$$R \equiv \text{“El producto contratado es de riesgo”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(C) = 0.75 \qquad \& \qquad P(R \mid C) = 0.2$$

a) $P(R \mid C) = \dfrac{P(R \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(R \cap C)}{0.75} = 0.2 \implies \boxed{P(R \cap C) = 0.15}$

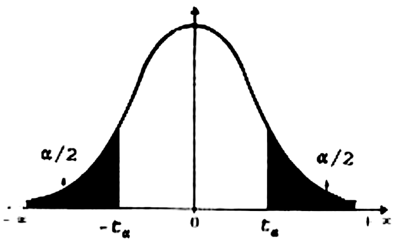
b) $P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = P(R) + 0.75 - 0.15 = 0.9 \implies \boxed{P(R) = 0.3}$

Ejercicio 10 (2 *puntos*)

El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 *euros. Se examinan las facturas de* 81 *hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de* 72 *euros. Se pide, justificando las respuestas:*

a) (1.5 puntos) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %*, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad.*

b) (0.5 puntos) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 *euros en dicha localidad?*



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

(Extremadura - Matemáticas CCSS - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto mensual en electricidad (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 72 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} = 2.92$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (69.08; 74.92)}$$

b) Como $70 \in (69.08; 74.92)$ no podemos afirmar que con un nivel de confianza del 90 %, el gasto medio en la localidad superó los 70 euros. Sí que podríamos afirmar que el gasto medio se encuentra entre 69.08 y 74.92.