MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2024
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2024 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

(2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciónes en función de los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} 2x + ay + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 2ay + 10z = a \end{cases}$$

(0.5 puntos) Resolverlo para $a = 0$.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 4 & 2 \\ a & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2a & 10 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a^2 + 8 = 0 \implies a = \{-2, 2\}$$

- Si $a \neq \{-2, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ -4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 128 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 4 \cdot (-2) = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y + 6 \cdot (-2) = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = -4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2 € y el de pienso compuesto de 3 €.

a) (2 puntos) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo?

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es este gasto mínimo?

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de contenedores de cereal"
  $y \equiv$ "Nº de contenedores de pienso compuesto"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

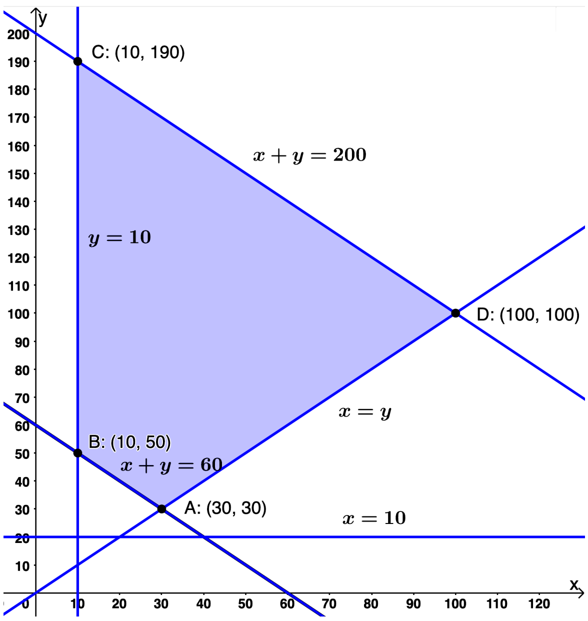
$$\begin{cases} 1 \;\; x+y \leq 200 & \rightarrow (0,200) \quad \& \quad (200,0) \\ 2 \;\; x+y \geq 60 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (60,0) \\ 3 \;\; x \leq y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (60,60) \\ 4 \;\; x \geq 10 & \rightarrow (10,0) \\ 5 \;\; y \geq 20 & \rightarrow (0,20) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 2x + 3y$ (euros)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	30	30	150
B	10	50	170
C	10	190	590
D	100	100	500



El *coste mínimo* de almacenamiento es de 150 euros, con 30 contenedores de cereal y otros 30 de pienso compuesto.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

La función de coste de una empresa es $C(q) = q^2 - 18q + 14$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p = 10 - q$, se desea conocer:

a) (0.5 puntos) La función de beneficio de esta empresa.

b) (1 punto) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado.

c) (0.5 puntos) El precio de venta óptimo.

d) (0.5 puntos) El beneficio máximo que puede lograr la empresa.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) $B = I - C = pq - (q^2 - 18q + 14) = (10 - q) \cdot q - (q^2 - 18q + 14) = -2q^2 + 28q - 14$

b) $B'(q) = -4q + 28 = 0 \implies q = 7$

$B''(q) = -4 \implies B''(7) - 4 < 0 \xRightarrow{(\cap)}$ Máximo en $q = 7$

El beneficio máximo se consigue con una producción de $q = 7$ unidades.

c) El precio de venta óptimo es de $p = 10 - q = 10 - 7 = 3$ €.

d) El beneficio, para una producción de 7 unidades asciende a $B(7) = 84$ €.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sea la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{, si } 0 < x < 3 \\ ax^2 - 6x + 3a & \text{, si } x \geq 3 \end{cases}$

a) *(1 punto) Hallar el valor de a para que la función sea continua en* $x = 3$.

b) *(1.5 puntos) Para ese valor de a y para* $x \geq 3$*, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto* $x = 3$.

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) `Continuidad en` $x = 3$:

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3}(3x - 3) = 6$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} = 9a - 18 + 3a = 12a - 18$
- $f(3) = 9a - 18 + 3a = 12a - 18$

$f(x)$ es continua en $x = 3 \iff \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \implies 12a - 18 = 6 \implies \boxed{a = 2}$

b) Para $a = 2$ y $x \geq 3$ tenemos $f(x) = 2x^2 - 6x + 6$

- $x_0 = 3 \implies y_0 = f(x_0) = f(3) = 6 \implies (x_0, y_0) = (3, 6)$
- $f'(x) = 4x - 6$
- $m_r = f'(x_0) = f'(3) = 6$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 6 = 6 \cdot (x - 3) \implies \boxed{r \equiv y = 6x - 12}$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$*, calcule:*

a) *(0.5 puntos) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes.*

b) *(0.5 puntos) Asíntotas verticales y horizontales.*

c) *(1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

d) *(0.5 puntos) Máximos y mínimos locales.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a)
- `Dominio:` $x^2-1=0 \implies x=\pm 1 \implies \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$
- `Corte con` OX: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2+1=0 \implies \nexists$ Pto. corte con OX
- `Corte con` OY: $x=0 \implies y=\dfrac{0+1}{0-1}=-1 \implies (0,-1)$

b)
- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x=-1$ y $x=1$
  - $$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
  - $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
- `A. Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1 \Rightarrow \exists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$ en $y=1$

c) $$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}=0 \implies -4x=0 \implies x=0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y *decreciente* en $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

d) La función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $(0,-1)$, careciendo de *mínimo relativo.*

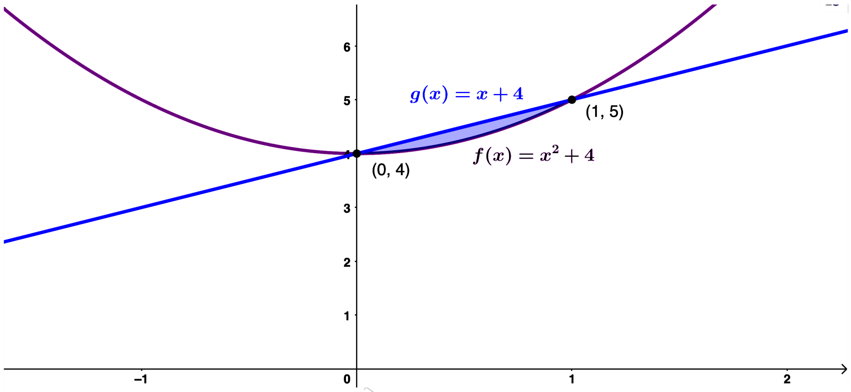
Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

> *Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = x^2+4$ y la recta $g(x) = x + 4$. Calcular su área.*
>
> *(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)*

Solución.

- $f(x) = x^2 + 4$ es una parábola *convexa* ($\cup$) con vértice en $(0, 0)$ y que pasa por $(-1, 5)$ y $(1, 5)$.
- $g(x) = x + 4$ es una recta creciente que pasa por $(0, 4)$ y $(1, 5)$.
- Los puntos de corte entre ambas funciones son:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 4 = x + 4 \Rightarrow x^2 - x = 0 \implies x \cdot (x - 1) = 0 \implies x = \{0, 1\}$$



Lo que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$, en donde la función $g(x)$ se encuentra por encima de $f(x)$.

$$\text{Área} = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^1 \left[x + 4 - (x^2 + 4)\right]dx = \int_0^1 (-x^2 + x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Bigg]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{6} \simeq 0.1667\ u^2$$

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$*:*

a) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int f(x)\,dx$*.*

b) (1.5 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$*, y las rectas* $x=0$ *y* $x=1$*.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int \underbrace{\frac{e^x}{e^x+2}}_{u'/u}\,dx = \ln|e^x+2| + C$

b) Hallamos el corte con OX : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2} = 0 \implies e^x = 0 \implies \nexists$ Solución

Lo que entre las rectas verticales $x=0$ y $x=1$ define un único recinto de integración $A_1 : (0,1)$.

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \ln(e+2) - \ln 3 = \ln\frac{e+2}{3}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \ln\frac{e+2}{3} \simeq 0.4528\ u^2$$

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

a) *En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45 % de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5 %, mientras que el segundo se avería un 8 % de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.*

   I) *(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe.*

   II) *(0.75 puntos) Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo?*

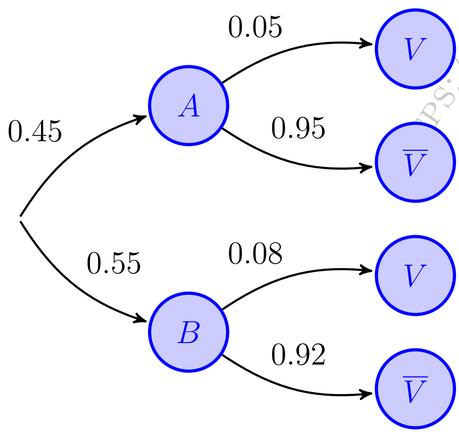
b) *(1 punto) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94 % para la duración media de los contratos temporales.*

(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2024)

Solución.

a) Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El inquilino usa el primer ascensor } (A)\text{”}$$
$$B \equiv \text{“El inquilino usa el segundo ascensor } (B)\text{”}$$
$$V \equiv \text{“El ascensor se avería”}$$



I) $$P(V) = P\big((A\cap V)\cup(B\cap V)\big) = P(A\cap V)+P(B\cap V) = P(A)\cdot P(V\mid A)+P(B)\cdot P(V\mid B) = 0.45\cdot 0.05+0.55\cdot 0.08 = 0.0665$$

II) $$P(B\mid V) = \frac{P(B\cap V)}{P(V)} = \frac{P(B)\cdot P(V\mid B)}{P(V)} = \frac{0.55\cdot 0.08}{0.0665} = 0.6615$$

b) $X \equiv$ “Duración de los contratos temporales (meses)” $\longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$

$X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 10 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.94$

$1-\alpha = 0.94 \implies \alpha = 0.06 \implies \alpha/2 = 0.03 \implies 1-\alpha/2 = 0.97 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.88$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88\cdot\frac{3}{\sqrt{100}} = 0.564$$

$$I.C._{94\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E;\overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{94\,\%}(\mu) = (9.436; 10.564)}$$