# MATEMATICAS CCSS
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JULIO 2024
## - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2024 (Extraordinario)

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

*Realiza las siguientes operaciones:*

*a) (0.5 puntos) El producto $A \cdot B$*

*b) (0.5 puntos) La inversa $C^{-1}$.*

*c) (0.5 puntos) La diferencia $D - A \cdot B$.*

*d) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot B + C \cdot X = D$, es decir , calcula la matriz $X$.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

b) $|C| = 1 \neq 0 \implies \exists C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $D - A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B + C \cdot X = D \implies C \cdot X = D - A \cdot B \implies \underbrace{C^{-1} \cdot C}_{I} \cdot X = C^{-1} \cdot (D - A \cdot B)$

$$\implies X = C^{-1} \cdot (D - A \cdot B) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 2 & 31 \end{pmatrix}}$$

**Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)**

*Sea $S$ la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:*

$$S \equiv \begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) *(2 puntos) Represente la región $S$ y calcule sus vértices.*

b) *(0.5 puntos) Determine los puntos de la región factible donde la función objetivo $f(x, y) = 2x + y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

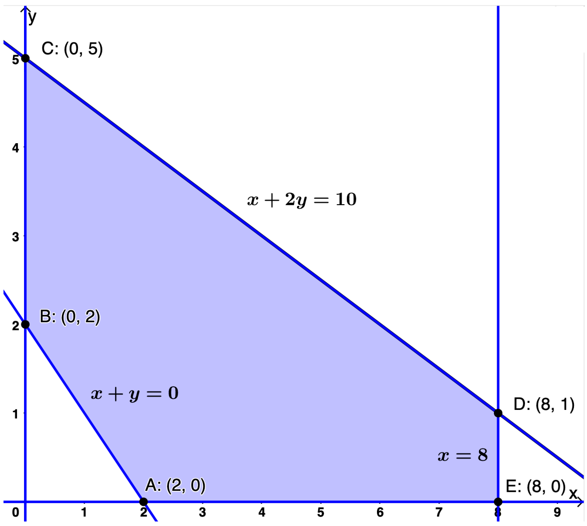
$$\begin{cases} \text{1} \;\; x + 2y \leq 10 & \rightarrow (0, 5) \quad \& \quad (10, 0) \\ \text{2} \;\; x + y \geq 2 & \rightarrow (0, 2) \quad \& \quad (2, 0) \\ \text{3} \;\; 0 \leq x \leq 8 & \rightarrow (8, 0) \\ \text{4} \;\; y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 2 | 0 | 4 |
| B | 0 | 2 | 2 |
| C | 0 | 5 | 5 |
| D | 8 | 1 | 17 |
| E | 8 | 0 | 16 |




El *mínimo* de $f(x, y)$ es de 2 y se produce en el punto $B : (0, 2)$.

El *máximo* de $f(x, y)$ es de 17 y se produce en el punto $D : (8, 1)$.

**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

*El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, donde $x$ representa el número de horas, $1 \leq x \leq 5$. Determine:*

*a) (1 punto) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición?*

*b) (0.75 puntos) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores? ¿Cuántos son?*

*c) (0.75 puntos) ¿En qué hora hay menos espectadores? ¿Cuántos son?*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a) $P'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \implies x = \{1, 3\}$

| | $(1,3)$ | $(3,5)$ |
|---|---|---|
| Signo $P'(x)$ | - | + |
| $P(x)$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |



El número de espectadores $P(x)$ es *creciente* en $(3,5)$, esto es, entre la tercera y quinta hora de la competición.

b) Como $P(1) = 8$ y $P(5) = 24$, el número de espectadores es *máximo* a las 5 horas con una asistencia de 24000 espectadores.

c) El número de espectadores $P(x)$ tiene un *mínimo relativo*, que es también *absoluto* en $x = 3$ horas y asciende a $P(3) = 4 \implies$ 4000 espectadores.

**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \text{ si } x<1 \\ \dfrac{ax+b}{x} & , \text{ si } 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & , \text{ si } x>2 \end{cases}$

*a) (1.5 puntos) Calcular el valor de los parámetros $a$ y $b$ para que la función sea continua en todo su dominio.*

*b) (1 punto) Determine la derivada $f'(x)$ para $x>2$.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a)
- Si $x \neq \{1,2\}$ la función $f(x)$ es continua pues $f_1(x)$ es un polinomio, $f_2(x)$ una racional cuyo denominador se anula en $x=0 \notin [1,2]$ y $f_3(x)$ una raíz cuyo dominio es $[-1,+\infty)$.
- `Continuidad en` $x=1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+1) = 2$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ax+b}{x} = a+b$
  - $f(1) = a+b$

  $f(x)$ es continua en $x=1 \iff \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \implies \odot\ a+b=2$
- `Continuidad en` $x=2$
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{ax+b}{x} = \dfrac{2a+b}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^3+1} = 3$
  - $f(1) = \dfrac{2a+b}{2}$

  $f(x)$ continua en $x=2 \iff \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow \dfrac{2a+b}{2} = 3 \implies \circledast\ 2a+b = 6$

$$\begin{array}{lcl} \odot\ a+b=2 & \xrightarrow{\times(-1)} & -a-\cancel{b}=-2 \\ \circledast\ 2a+b=6 & \longrightarrow & \underline{2a+\cancel{b}=6} \\ & & a=4 \implies \boxed{a=4} \\ & & a+b=2 \implies 4+b=2 \implies \boxed{b=-2} \end{array}$$

b) Para $x>2 \implies f(x) = \sqrt{x^3+1} = (x^3+1)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(x^3+1)^{-1/2}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

**Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)**

*Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$, *calcule:*

*a) (0.5 puntos) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.*

*b) (0.5 puntos) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.*

*c) (1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

*d) (0.5 puntos) Máximos y mínimos locales.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a)
- `Dominio:` $x^2-4=0 \implies x=\pm 2 \implies \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$
- `Corte con` $OX$: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}=0 \implies \nexists$ Pto. de corte con $OX$
- `Corte con` $OY$: $x=0 \implies y=-\dfrac{1}{4} \implies (0,-1/4)$



b)
- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x=-2$ y $x=2$
  - $$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2-4} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
  - $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
- `A. Horizontal:` $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2-4} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow \underset{x\to\pm\infty}{\exists\, A.H.}$ en $y=0$

c) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2-4)^2} = 0 \implies 2x=0 \implies x=0$

| | $(-\infty,-2)$ | $(-2,0)$ | $(0,2)$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | + | + | - | - |
| $f(x)$ | Creciente $\nearrow$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Decreciente $\searrow$ |

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y *decreciente* en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

d) La función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $(0,-1/4)$.

**Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)**

*Dada la función* $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$*:*

*a) (1.25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva* $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ *en el punto* $x = 1$.

*b) (1.25 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la curva* $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$, *el eje de abscisas y la recta* $x = 1$.

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a)
- $x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = 2/3 \implies (x_0, y_0) = (1, 2/3)$
- $f'(x) = \dfrac{2\cdot(x^2+2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$
- $m_r = f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{2}{9}$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}\cdot(x-1) \implies \boxed{r \equiv y = \dfrac{2}{9}x + \dfrac{4}{9}}$

b) Hallamos el corte de $f(x)$ y el eje $OX \implies \dfrac{2x}{x^2+2} = 0 \implies x = 0$, que junto con la recta $x = 1$ define un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{\frac{2x}{x^2+2}}_{u'/u}\,dx = \ln\left|x^2+2\right|\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \ln\frac{3}{2} = 0.4055\ u^2$$

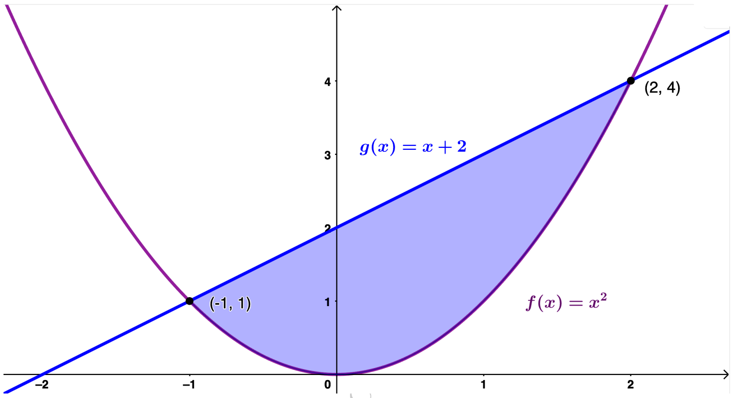
**Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)**

*Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$ y representar gráficamente esta región.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

- $f(x) = x^2$ es una parábola *convexa* ($\cup$) con vértice en $(0, 0)$.
- $g(x) = x + 2$ es una recta creciente que pasa por $(0, 2)$ y $(-2, 0)$
- $f(x) \cap g(x) \implies x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = \{-1, 2\}$, es decir, las dos funciones se cortan en los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.




Lo que define un único recinto de integración $A : (-1, 2)$ con $g(x)$ por encima de $f(x)$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2} = 4.5\ u^2$$

**Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)**

a) *Al 45 % de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40 % jugar al dominó y al 23 % jugar a las cartas y al dominó. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:*

i) *(0.5 puntos) Que juegue a las cartas o al dominó.*

ii) *(0.5 puntos) Que no juegue ni a las cartas ni al dominó.*

iii) *(0.5 puntos) Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al dominó.*

b) *(1 punto) La altura de los estudiantess de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida $\mu$ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99 %.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Julio 2024)*

**Solución.**

a) Sean los sucesos:

$$C \equiv \text{“Al socio le gusta jugar a las cartas”}$$
$$D \equiv \text{“Al socio le gusta jugar al dominó”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(C) = 0.45 \qquad \& \qquad P(D) = 0.4 \qquad \& \qquad P(C \cap D) = 0.23$$

i) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0.45 + 0.4 - 0.23 \implies \boxed{P(C \cup D) = 0.62}$

ii) $P(\overline{C} \cap \overline{D}) = P(\overline{C \cup D}) = 1 - P(C \cup D) = 1 - 0.62 \implies \boxed{P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0.38}$

iii) $P(C \mid D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.23}{0.4} \implies \boxed{P(C \mid D) = 0.575}$

b) $X \equiv$ “Altura de los estudiantes (cm)” $\longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 4)$

$X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=16} \overline{x} = 172 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{16}} = 2.575$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (169.425; 174.575)}$