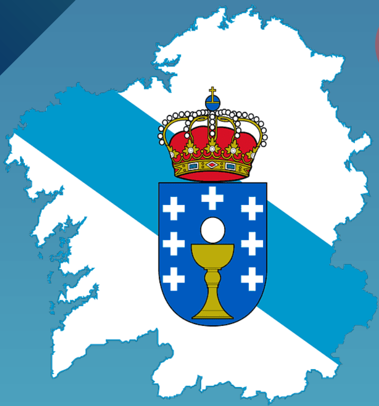
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una de las principales novedades de las pruebas PAU 2025 es que el examen de cada materia debe incluir un ejercicio obligatorio y de carácter "más competencial". Aunque las notas se publican la semana siguiente de haberse realizado el examen, los miembros del grupo de trabajo de la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II están interesados en determinar cuanto antes si se han producido cambios relevantes en la nota media de la materia que coordinan, con relación a las notas de cursos pasados.
Con este objetivo han contactado, previamente con un grupo de correctores, de los que cada uno de ellos se ha comprometido a corregir un máximo de 25 exámenes el primer día. Por los datos de otros cursos, las notas de esta materia pueden suponerse que siguen una distribución normal con desviación típica igual a 1.5.
Responda estos tres apartados:

a) *Si se quiere estimar esta nota media con un error máximo de 0.25, empleando un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de correctores que se necesitan?*

b) *Una vez corregidos los 100 primeros exámenes, la nota media resulta ser igual a 7.2. A partir de esta muestra, calcule un intervalo de confianza con nivel de confianza del 95 % de la nota media.*

c) *Una vez corregidos todos los exámenes, se eligen 25 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la nota media de estos 25 exámenes sea superior a 7 si sabemos que $\mu = 7.3$?*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción Obligatoria)

Solución.

$$X \equiv \text{“Notas de la materia Matemáticas II”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1.5)$$

a) $n = ?\qquad \& \qquad E < 0.25 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\cdot\frac{1.5}{\sqrt{n}} < 0.25 \implies n > \left(1.96\cdot\frac{1.5}{0.25}\right)^2 = 138.29 \implies \boxed{n = 139}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1.5) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 7.2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\cdot\frac{1.5}{\sqrt{100}} = 0.294$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E; \overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (6.906; 7.494)}$$

c) $X : \mathcal{N}(7.3, 1.5) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n}) = \mathcal{N}(7.3, 0.3)$

$$P(\overline{X} \geq 7) = P\left(Z \geq \frac{7-7.3}{0.3}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0.8413$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule la inversa de la matriz A.

b) Calcule la matriz $BA^\top$ y determine su rango (siendo $A^\top$ la matriz traspuesta de A).

c) Despeje X en la ecuación matricial $XA + B = BA^\top$ y calcúlela.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = -1 \quad \& \quad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $BA^\top = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Como $F_2 = -2F_1 \implies \operatorname{ran}(AB^\top) = 1$

c) $XA + B = BA^\top \implies XA = BA^\top - B \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (BA^\top - B) \cdot A^{-1}$

$\implies \boxed{X = (BA^\top - B) \cdot A^{-1}}$

$$X = (BA^\top - B) \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & -2 & -12 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + y \le 4 \qquad \& \qquad 3x \le 4 + 5y \qquad \& \qquad y \le 7x + 12$$

a) *Representa gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.*

b) *Justifique si los puntos $P(2,1)$ y $Q(0,-1)$ están o no en la región factible.*

c) *Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = 6x - 10y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.*

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

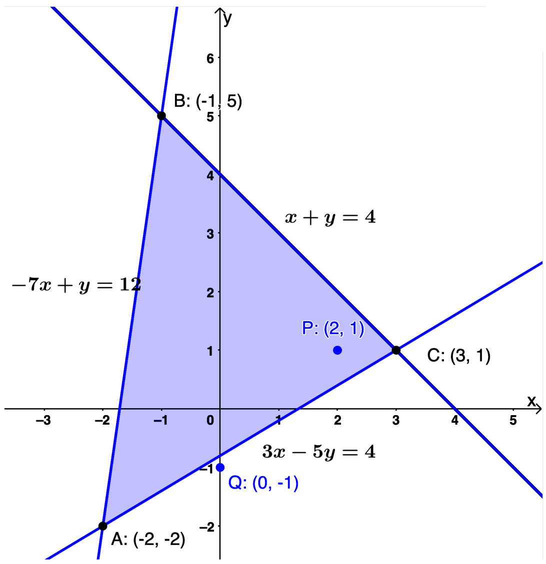
$$\begin{cases} ① \; x + y \le 4 \\ ② \; 3x \le 4 + 5y \\ ③ \; y \le 7x + 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ① \; x + y \le 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (4,0) \\ ② \; 3x - 5y \le 4 & \to (-2,-2) \quad \& \quad (3,1) \\ ③ \; -7x + y \le 12 & \to (0,12) \quad \& \quad (-2,-2) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 6x - 10y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	-2	-2	8
B	-1	5	-56
C	3	1	8



b) $P : (2,1)$ pertenece a la región factible pues cumple todas las restricciones

$$① \; 2 + 1 \le 4 \checkmark \qquad \& \qquad ② \; 6 - 5 \le 4 \checkmark \qquad \& \qquad ③ \; -14 + 1 \le 12 \checkmark$$

$Q : (0,-1)$ no cumple ② $3x - 5y \le 4 \Longrightarrow 0 + 5 \not\le 4$

c) El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -56 y se produce en el punto $B : (-1,5)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de 8 y se produce en cualquier punto del segmento que une los puntos $A : (-2,-2)$ y $C : (3,1)$, definido por:

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 5y = 4, \; \forall x \in [-2,3] \right\}$$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

La evolución del precio (en euros) de un protector de pantalla para móvil a lo largo del año 2024 viene dado por la función

$$P(t) = \begin{cases} 9 - t^2 + 8t & , si\ 0 \leq t < 7 \\ (t-10)^2 + 7 & , si\ 7 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) *¿Cuál fue el precio inicial de ese protector de pantalla? ¿Cuál ha sido su precio al final del año?*

b) *Determine en qué periodos ha aumentado y disminuido el precio del protector.*

c) *¿Cuál ha sido el precio máximo alcanzado? ¿Y el mínimo? ¿En qué momentos se producen?*

Razone las respuestas

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $P(0) = 9$ € & $P(12) = 11$ €

b) $P'(t) = \begin{cases} -2t + 8 = 0 \implies t = 4 & , \text{si } 0 < t < 7 \\ 2t - 20 = 0 \implies t = 10 & , \text{si } 7 < t < 12 \end{cases}$

	$(0,4)$	$(4,7)$	$(7,10)$	$(10,12)$
Signo $P'(t)$	+	-	-	+
$P(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El precio del protector de pantalla $P(t)$ es *creciente* en $(0,4) \cup (10,12)$ y *decreciente* en $(4,10)$ ($P(t)$ es continua en $t = 7$ ya que $\lim_{t \to 7^-} P(t) = \lim_{t \to 7^+} P(t) = P(7) = 16$).

c) El precio del protector de pantalla $P(t)$ tiene un *máximo relativo* en $(4, 25)$ y como $P(12) = 11$, dicho máximo es también absoluto. Así que en el mes 4 el precio es máximo y asciende a 25 €.
$P(t)$ tiene un *mínimo relativo* en $(10, 7)$ y teniendo en cuenta que $P(0) = 9$ dicho mínimo será también absoluto. Por tanto el mes 10 el protector tendrá un precio mínimo de 7 €.

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$.

a) *Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.*

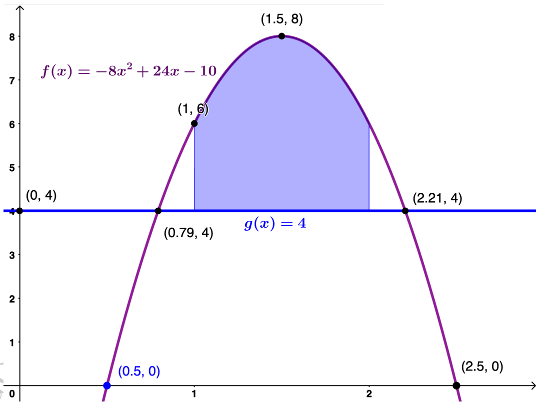
b) *Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función* f *y las rectas* $x = 1$, $x = 2$ *e* $y = 4$.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

a) Para la representación de $f(x)$ tenemos:

- Es una parábola *cóncava* ($\cap$)
- Corta a OX en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ & $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.
  Corta a OY en $(0, -10)$.
- $f'(x) = -16x + 24 = 0 \implies x = 3/2$
  $f''(x) = -16 \implies f''(3/2) = -16 < 0$, luego $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto $\left(\frac{3}{2}, 8\right)$.



b) Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$f(x) = g(x) \implies -8x^2+24x-10 = 4 \implies 4x^2-12x+7 = 0 \implies x = \{0.79, 2.21\}$$

El intervalo $(1, 2)$ limitado por las rectas verticales pedidas es interior al intervalo $(0.79, 2.21)$ definido por el corte de ambas funciones.
Por tanto el área buscada tiene un único recinto de integración $A : (1, 2)$ en donde la función $f(x)$ está por encima de $g(x)$.

$$\text{Area} = \int_1^2 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_1^2 \left(-8x^2 + 24x - 14\right) dx = -\frac{8x^3}{3} + 12x^2 - 14x\Big]_1^2$$
$$= \left(-\frac{64}{3} + 48 - 28\right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 14\right) = \frac{10}{3} = 3.33\ u^2$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A \mid B) = \frac{1}{2} \qquad \& \qquad P(B \mid A) = \frac{1}{3} \qquad \& \qquad P(A \cup B) = \frac{1}{4}$$

a) Calcule $P(A \cap B)$.

b) Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{2} \implies P(B) = 2P(A \cap B)$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \implies P(A) = 3P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3P(A \cap B) + 2P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= 4P(A \cap B) = \frac{1}{4} \implies \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{16}}$$

b) $P(A) = 3P(A \cap B) = 3 \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{16} \quad \& \quad P(B) = 2P(A \cap B) = 2 \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{8}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = \dfrac{1}{16} \\ P(A) \cdot P(B) = \dfrac{3}{16} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{128} \end{array}\right\} \implies \left| \implies \begin{array}{l} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}\right.$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Un estudio revela que el 40 % de los automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año son propulsados por un motor con tecnología híbrida. Si en un control de carreteras son inspeccionados 5 automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos cuente con un motor con tecnología híbrida?

b) Calcule la probabilidad de que, entre los 5 automóviles, más de 3 cuenten con un motor con tecnología híbrida.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nº de automóviles híbridos de entre 5”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(5, 0.4)$$

a) $P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^5 = 0.0778$

b) $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^0 = 0.0870$