

MATEMATICAS CCSS EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2025 - Extraordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Julio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1A (2 puntos)

Dados dos sucesos, A y B , de un experimento aleatorio, sabemos que:

$$P(A) = 0.5 \quad \& \quad P(B) = 0.1 \quad \& \quad P(A | B) = x, \text{ donde } x \in [0, 1]$$

Se pide:

- a) (1 punto) ¿Existe algún valor de x para el cual los sucesos sean independientes?
- b) (1 punto) ¿Para qué valor de x se tiene que la probabilidad de $A \cap B$ es máxima?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción Obligatoria)

Solución.

a) A y B independientes $\implies P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.1} = x \implies \boxed{x = 0.5}$$

b) $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.1} = x \implies P(A \cap B) = 0.1x$

$$P(A \cap B) \text{ es máxima} \iff x \text{ es máximo} \implies \boxed{x = 1}$$

_____ o _____

Ejercicio 1B (2 puntos)

El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de estos datos, para 2023, sobre la cantidad de habitantes en España por nacionalidad y sexo:

	Españoles	Extranjeros
Hombres	20,6 millones	3,0 millones
Mujeres	21,2 millones	3,3 millones

- a) (1 punto) Escogiendo a un hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea extranjero?
- b) (1 punto) Escogiendo dos habitantes al azar de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno sea extranjero?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

Sean los sucesos:

$E \equiv$ “Españoles”

$\bar{E} \equiv$ “Extranjeros”

$M \equiv$ “Mujeres”

$H \equiv$ “Hombres”

Hacemos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	E	$\bar{E}$	Total
M	20.6	3	23.6
H	21.2	3.3	24.5
Total	41.8	6.3	48.1

$$\text{a) } P(\bar{E}) = \frac{6.3}{48.1} = 0.131$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\bar{E} \geq 1) &= 1 - P(\bar{E} = 0) = 1 - P(E \cap E) \\ &= 1 - \left(\frac{41.8}{48.1}\right)^2 = 0.2448 \end{aligned}$$

_____ o _____

Ejercicio 1C (2 puntos)

Supongamos que, cuando un cliente entra en una tienda de electrodomésticos, el tiempo que pasa dentro viene dado por una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional $\mu = 15$ minutos y desviación típica $\sigma = 10$ minutos: $X \approx \mathcal{N}(15, 10)$.

- a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda 25 minutos o menos?
- b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda entre 5 y 25 minutos?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción C - Extraordinario)

Solución.

$X \equiv$ "Tiempo de estancia en la tienda (min)" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(15, 10)$

a) $P(X \leq 25) = P\left(Z \leq \frac{25 - 15}{10}\right) = P(Z \leq 1) = 0.8413$

b) $P(5 \leq X \leq 25) = P\left(\frac{5 - 15}{10} \leq Z \leq \frac{25 - 15}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1)$
 $= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1)$
 $= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1$
 $= 0.6826$

_____ o _____

Ejercicio 2A (3 puntos)

En una fábrica textil fabricamos vestidos, camisetas y faldas.

- Cada vestido requiere $5 m^2$ de tejido y 5 botones.
- Cada camiseta requiere $4 m^2$ de tejido y 3 botones.
- Cada falda requiere $4 m^2$ de tejido y ningún botón.

a) (0.5 puntos) Si queremos fabricar 10 vestidos 15 camisetas y 20 faldas, ¿cuántos m^2 de tejido y cuántos botones necesitamos?

b) (1.5 puntos) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

c) (1 punto) Si disponemos de $100 m^2$ de tejido y 120 botones, ¿podemos utilizar completamente los recursos fabricando productos?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

Sean x en número de vestidos, y el de camisetas y z el de faldas y sean t los m^2 de tejido y b el número total de botones. Tenemos:

$$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Queremos fabricar $x = 10$ vestidos, $y = 15$ camisetas y $z = 20$ faldas tendremos:

$$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t = 190 m^2 \text{ de tejido} \\ b = 95 \text{ botones} \end{matrix}$$

b) Resolvemos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & | & 100 \\ 5 & 3 & 0 & | & 120 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & | & 100 \\ 0 & -1 & -4 & | & 20 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} \Rightarrow 5x + 4 \cdot (-20 - 4\lambda) + 4\lambda &= 100 & \Rightarrow x &= 26 + \frac{12\lambda}{5} \\ \Rightarrow -y - 4\lambda &= 20 & \Rightarrow y &= -20 - 4\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow z &= \lambda & \Rightarrow z &= \lambda \end{aligned}$$

c) Tenemos que buscar un valor de λ de manera que x, y, z sean números naturales. Esto es imposible porque si $z \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0 \Rightarrow y = -20 - 4\lambda < 0$.

————— o —————

Ejercicio 2B (3 puntos)

Considera las matrices cuadradas A , B , M y N de tamaño 3×3 .

a) (1 punto) Calcula todos los valores de x tales que $A^2 = A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Encuentre una matriz B invertible, tal que $B^2 = B$.

c) (1 punto) Dadas dos matrices M y N invertibles tales que $M^2 = M$ y $N^2 = N$, construimos la matriz siguiente: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. ¿Es cierto que $C^2 = C$?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9x+25 & x^2+7x+8 & 6x+16 \\ 9x+27 & x^2+9x+12 & 6x+18 \\ -6 & -4x-6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \implies \begin{pmatrix} 9x+25 & x^2+7x+8 & 6x+16 \\ 9x+27 & x^2+9x+12 & 6x+18 \\ -6 & -4x-6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9x+25=7 \implies x=-2 \\ x^2+7x+8=x \implies x=\{-4, -2\} \\ 6x+16=4 \implies x=-2 \\ 9x+27=9 \implies x=-2 \\ x^2+9x+12=x \implies x=\{-2, -6\} \\ 6x+18=6 \implies x=-2 \\ -4x-6=2 \implies x=-2 \end{cases} \implies \boxed{x=-2}$$

$$\text{b) } B^2 = B \implies B \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I = \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I \implies \boxed{B = I}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} M^2 = M \xrightarrow{\exists M^{-1}} M = I \\ N^2 = N \xrightarrow{\exists N^{-1}} N = I \end{array} \right\} \implies C = N \cdot M \cdot N^{-1} = I \implies C^2 = I^2 = I = C \text{ q.e.d.}$$

Nota: Podríamos haber utilizado el resultado del apartado b) para resolver el a) de una forma mucho más sencilla.

Si A fuese invertible tendríamos que $A^2 = A \xrightarrow{\exists A^{-1}} A = I$. Como, por ejemplo, el elemento $a_{11} = 7 \neq 1 \implies A \neq I$ de lo que se deduce que A no es invertible, luego $|A| = 0$.

$$|A| = -12 - 6x = 0 \implies \boxed{x = -2}$$

Ejercicio 3A (3 puntos)

Restringidos al dominio $[0, 20]$, considera las tres funciones siguientes:

$$f(x) = x \cdot (10 - x) \quad \& \quad g(x) = 125 - 20x \quad \& \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } 0 \leq x \leq 15 \\ g(x) & , \text{ si } 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

a) (1 punto) ¿Para qué x se tiene que $f(x) = g(x)$? ¿Para qué x se tiene que $f'(x) = g'(x)$?

b) (1 punto) Estudia la continuidad de la función $h(x)$.

c) (1 punto) ¿Es la función $h(x)$ derivable? ¿En qué intervalos es creciente?

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

$$f(x) = 10x - x^2 \implies f'(x) = 10 - 2x \quad \& \quad g(x) = 125 - 20x \implies g'(x) = -20$$

a) $f(x) = g(x) \implies 10x - x^2 = 125 - 20x \implies x^2 - 30x + 125 \implies \boxed{x = \{5, 25\}}$

$$f'(x) = g'(x) \implies 10 - 2x = -20 \implies 2x = 30 \implies \boxed{x = 15}$$

b) ■ Si $x \neq 15 \implies h(x)$ es continua pues las ramas $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios

■ Si $x = 15$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 15^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 15^-} f(x) = f(15) = -75$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 15^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 15^+} g(x) = g(15) = -175$$

$$\bullet h(15) = f(15) = -75$$

$\lim_{x \rightarrow 15^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 15^+} h(x) \implies h(x)$ no es continua en $x = 15$, luego $h(x)$ es continua en $[0, 15) \cup (15, 20]$.

c) Como $f(x)$ y $g(x)$ son derivables por ser polinomios y, al no ser $h(x)$ continua en $x = 15$, tampoco será derivable en ese punto. Por tanto $h(x)$ es derivable en $(0, 15) \cup (15, 20)$.

$$h'(x) = \begin{cases} 10 - 2x = 0 \implies x = 5 & , \text{ si } 0 < x < 15 \\ -20 < 0 & , \text{ si } 15 < x < 20 \end{cases}$$

	$(0, 5)$	$(5, 15)$	$(15, 20)$
Signo $h'(x)$	+	-	-
$h(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $h(x)$ es *creciente* en $(0, 5)$ y *decreciente* en $(5, 15) \cup (15, 20)$.

_____ o _____

Ejercicio 3B (3 puntos)

Considera la función $f(x) = 10^x + x^{10}$ para $x \in [0, \infty]$.

a) (1 punto) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

b) (1 punto) Calcula $f'(x)$.

c) (1 punto) Calcula justificadamente $\int_0^1 f'(x) dx$.

(Islas Baleares - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (10^x + x^{10}) = 1 + 0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (10^x + x^{10}) = +\infty$$

b) $f'(x) = 10^x \cdot \ln 10 + 10x^9$

c) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = (10 + 1) - 1 = 10$

_____ o _____