



No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Conteste el problema A1, y conteste también un problema a escoger entre el problema A2 y el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatorio). — Dados dos sucesos, A y B , de un experimento aleatorio, sabemos que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, y que $P(A \mid B) = x$, donde $x \in [0, 1]$. Se pide:

- a) ¿Existe algún valor de x para el cual los sucesos sean independientes? (1 pt)
- b) ¿Para qué valor de x se tiene que la probabilidad de $A \cap B$ es máxima? (1 pt)

Problema A2. — El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de estos datos, para el 2023, sobre la cantidad de habitantes en España por nacionalidad y sexo:

	Espanoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones

- a) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea extranjero? (1 pt)
- b) Escogiendo dos habitantes al azar de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno sea extranjero? (1 pt)

Problema A3. — Supongamos que, cuando un cliente entra en una tienda de electrodomésticos, el tiempo que pasa dentro viene dado por una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional $\mu = 15$ minutos y desviación típica $\sigma = 10$ minutos: $X \sim \mathcal{N}(15, 10)$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente pase dentro de la tienda 25 minutos o menos? (1 pt)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente pase dentro de la tienda entre 5 y 25 minutos? (1 pt)



Parte B. — Escoja solo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema B1. — En una fábrica textil fabricamos vestidos, camisetas y faldas.

- Cada vestido requiere 5 m^2 de tejido y 5 botones.
 - Cada camiseta requiere 4 m^2 de tejido y 3 botones.
 - Cada falda requiere 4 m^2 de tejido y ningún botón.
- a) Si queremos fabricar 10 vestidos, 15 camisetas y 20 faldas, ¿cuántos m^2 de tejido y cuántos botones necesitamos? **(0.5 pt)**
- b) Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

(1.5 pt)

- c) Si disponemos de 100 m^2 de tejido y 120 botones, ¿podemos utilizar completamente los recursos fabricando productos? **(1 pt)**

Problema B2. — Considera las matrices cuadradas A , B , M , y N de tamaño 3×3 .

- a) Calcula todos los valores de x tales que $A^2 = A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1 pt)

- b) Encuentra una matriz B invertible, tal que $B^2 = B$. **(1 pt)**
- c) Dadas dos matrices M y N invertibles tales que $M^2 = M$ y $N^2 = N$, construimos la matriz siguiente: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. ¿Es cierto que $C^2 = C$? **(1 pt)**



Parte C. — Escoja solo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema C1. — Restringidos al dominio $x \in [0, 20]$, considera las tres funciones siguientes:

$$f(x) = x(10 - x), \quad g(x) = 125 - 20x, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 15, \\ g(x) & \text{si } 15 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

- a) ¿Para qué x se tiene que $f(x) = g(x)$? ¿Para qué x se tiene que $f'(x) = g'(x)$? (1 pt)
- b) Estudia la continuidad de la función $h(x)$. (1 pt)
- c) ¿Es la función $h(x)$ derivable? ¿En qué intervalos es creciente? (1 pt)

Problema C2. — Considera la función $f(x) = 10^x + x^{10}$, para $x \in (0, +\infty)$.

- a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (1 pt)
- b) Calcula $f'(x)$. (1 pt)
- c) Calcula justificadament $\int_0^1 f'(x) dx$. (1 pt)