MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

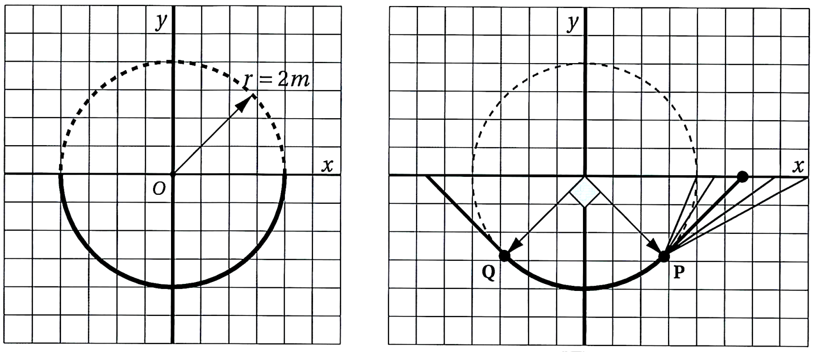
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Junio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY).



a) *(0.5 puntos) Calcula el punto P.*

b) *(2 puntos) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia $\widehat{QP}$ y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches).*

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) El punto P es la intersección (de abscisa positiva) entre la recta $y = -x$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x \end{cases} \implies x^2 + (-x)^2 = 4 \implies 2x^2 = 4 \implies x = \sqrt{2} \xrightarrow{y=-x} P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

b) La recta que prolonga el arco de circunferencia ha de ser la tangente a la misma en el punto $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, para que haya continuidad en la trayectoria del skater.

$P(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$2x + 2yy' = 0 \implies y' = -\dfrac{x}{y}$

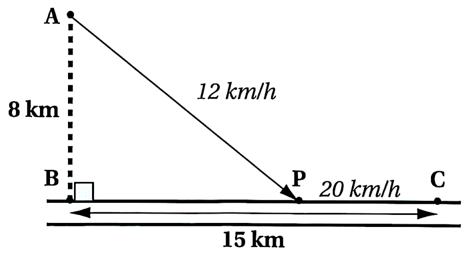
$m_r = y'(x_0, y_0) = y'(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y + \sqrt{2} = 1 \cdot (x - \sqrt{2}) \implies \boxed{r \equiv y = x - 2\sqrt{2}}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km(h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible.



(Navarra - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

Si llamamos x a la distancia $\overline{BP}$, el ciclista circulará $\overline{AP} = \sqrt{8^2 + x^2} = \sqrt{64 + x^2}$ por fuera de la pista a 12 km/h y $\overline{PC} = 15 - x$ km por la pista a 20 km/h. El tiempo que tardará en hacer el recorrido será:

$$t(x) = \frac{\sqrt{64 + x^2}}{12} + \frac{15 - x}{20}$$

$$t'(x) = \frac{x}{12 \cdot \sqrt{64 + x^2}} - \frac{1}{20} = 0 \implies 5x = 3 \cdot \sqrt{64 + x^2} \implies 25x^2 = 9 \cdot (64 + x^2)$$

$$\implies 16x^2 = 576 \implies x = 6 \text{ (la solución negativa no tiene sentido)}$$

	$(0, 6)$	$(6, 15)$
Signo $t'(x)$	$-$	$+$
$t(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El tiempo de recorrido $t(x)$ es *decreciente* en $(0, 6)$ y *creciente* en $(6, 15)$, y tiene un *mínimo relativo*, (que en este caso también es *absoluto*) en $(6, {}^{77}/_{60})$. Luego el ciclista ha de dirigirse a un punto P a 6 km de B y seguir por la pista. En total recorrerá $\sqrt{64 + 6^2} = 10$ km fuera de pista y $15 - 6 = 9$ km por la pista y tardará $t(6) = \dfrac{77}{60} =$ 1 h 17 min.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m *y resuélvelo en los casos en que sea compatible:*

$$\begin{cases} (m^2-m)x+(m+2)y-z=1-m^2 \\ (m^2-m)x+(2m+1)y=2 \\ (m-m^2)x-(2m+1)y+(m+2)z=2m+2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

- Vamos a obtener, por el método de Gauss, el sistema escalonado equivalente que nos haga más sencillo discutir el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m^2-m & m+2 & -1 & 1-m^2 \\ m^2-m & 2m+1 & 0 & 2 \\ m-m^2 & -2m-1 & m+2 & 2m+2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m^2-m & m+2 & -1 & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 1 & m^2+1 \\ 0 & -m+1 & m+1 & -m^2+2m+3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m^2-m & m+2 & -1 & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 1 & m^2+1 \\ 0 & 0 & m+2 & 2m+4 \end{array}\right)$$

El determinante de la matriz de coeficientes $|A|$ no ha cambiado por las operaciones por filas que hemos hecho sobre él. Por lo tanto:

$$|A|=(m^2-m)\cdot(m-1)\cdot(m+2)=m\cdot(m+2)\cdot(m-1)^2=0 \implies m=\{-2,0,1\}$$

  - Si $m\neq\{-2,0,1\}$ $\quad |A|\neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=3=\operatorname{ran}(A^*)=\text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow (m^2-m)x+(m+2)\cdot(m+1)-2=1-m^2 & \Rightarrow & x=\frac{-2m^2-3m+1}{m^2-m} \\ \Rightarrow (m-1)y+2=m^2+1 & \Rightarrow & y=m+1 \\ \Rightarrow (m+2)z=2m+4 & \Rightarrow & z=2 \end{array}$$

  - Si $m=-2$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{lll} \Rightarrow 6x-5-3\lambda=-3 & \Rightarrow & x=\frac{2+3\lambda}{6} \\ \Rightarrow -3\lambda+z=5 & \Rightarrow & y=\lambda \\ \Rightarrow y=\lambda & \Rightarrow & z=5+3\lambda \end{array} \quad ,\lambda\in\mathbb{R}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

- Si $m = 0$ Sistema Incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

- Si $m = 1$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow 3y - 2 = 0 & \Rightarrow & x = \lambda \\ \Rightarrow z = 2 & \Rightarrow & y = 2/3 \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x = \lambda & \Rightarrow & z = 2 \end{array}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \dfrac{1}{3}$ y $|B| = 3$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 3 \cdot \left(A^\top\right)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}$$

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$|C| = \left|3 \cdot \left(A^\top\right)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}\right| = 3^3 \cdot \left|\left(A^\top\right)^2\right| \cdot \left|(A \cdot B)^{-1}\right| = 27 \cdot \left|A^\top\right|^2 \cdot \frac{1}{|A \cdot B|}$$

$$= 27 \cdot |A|^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{|A|} \cdot |B|} = \frac{27 \cdot |A|}{|B|} = \frac{27 \cdot \frac{1}{3}}{3} = 3$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s, siendo:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2z-10=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(3,7,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-3,-1) \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} S(4,-1,0) \\ \vec{d_s} = (-1,1,-1) \end{cases}$$

La recta t pedida es perpendicular a r y a s, luego:

$$\vec{d_t} = \vec{d_r} \times \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4,2,-2) \approx (2,1,-1)$$

La recta t es la intersección de los planos π_1 y π_2

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} R(3,7,0) \\ \vec{d_r} = (1,-3,-1) \\ \vec{d_t} = (2,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow 4 \cdot (x-3) - (y-7) + 7z = 0 \Longrightarrow \pi_1 \equiv 4x - y + 7z - 5 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} S(4,-1,0) \\ \vec{d_s} = (-1,1,-1) \\ \vec{d_t} = (2,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow -3 \cdot (y+1) - 3z = 0 \Longrightarrow \pi_2 \equiv y + z + 1 = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} 4x - y + 7z - 5 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow t \equiv \begin{cases} T(1,-1,0) \\ \vec{d_t} = (2,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3,3,5)$ y $B(1,-1,1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior 6 u.

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$\pi \equiv \begin{cases} M_{\overline{AB}} = \dfrac{A+B}{2} = (2,1,3) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} = (-2,-4,-4) \approx (1,2,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv x + 2y + 2z + D = 0$$

$$\xRightarrow{M\in\pi} 2+2+6+D = 0 \Longrightarrow D = -10 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv x + 2y + 2z - 10 = 0}$$

Los planos paralelos a π son de la forma $\pi' \equiv x + 2y + 2z + K = 0$ y sea $M(2,1,3) \in \pi$

$$d(\pi,\pi') = d(M,\pi') = \frac{|2+2+6+K|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|10+K|}{3} = 6 \Longrightarrow |10+K| = 18$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 10+K = -18 \Longrightarrow K = -28 \Longrightarrow \boxed{\pi_1' \equiv x + 2y + 2z - 28 = 0} \\ 10+K = 18 \Longrightarrow K = 8 \Longrightarrow \boxed{\pi_2' \equiv x + 2y + 2z + 8 = 0} \end{cases}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Sea $f(x) = e^{x \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$

a) *(1.25 puntos) Demuestra que existe un punto* c *en* $(2,3)$ *tal que* $f(c) = \dfrac{1}{2}$. *Enuncia y justifica el resultado teórico empleado.*

b) *(1.25 puntos) Demuestra que existe un punto* d *en* $(0,2)$ *tal que* $f'(d) = 0$. *Enuncia y justifica el resultado teórico empleado.*

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) Sea $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2} = e^{x \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)} - \dfrac{1}{2}$.

- $g(x)$ es continua en $[2,3]$ por ser composición de exponencial y seno.
- $g(2) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-e}{2e} < 0$
- $g(3) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$

Por el *Teorema de Bolzano* $\exists c \in (2,3) \mid g(c) = f(c) - \dfrac{1}{2} = 0 \implies f(c) = \dfrac{1}{2}$ q.e.d.

b)
- $f(x)$ es continua en $[0,2]$ por composición de funciones continuas y derivable en $(0,2)$
- $f(0) = 1 = f(2)$

Por el *Teorema de Rolle* $\exists c \in (0,2) \mid f'(c) = 0$ q.e.d.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

> *Calcula los tres puntos de corte entre* $f(x) = \text{sen}\,(\pi x)$ *y* $g(x) = x^3 - x$*. Calcula el área encerrada entre ambas curvas.*
>
> *(Navarra - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)*

Solución.

$$f(x) = g(x) \implies \text{sen}\,(\pi x) = x^3 - x \implies x^3 - x - \text{sen}\,(\pi x) = 0$$
$$\implies x \cdot (x-1) \cdot (x+1) - \text{sen}\,(\pi x) = 0 \implies x = \{-1, 0, 1\}$$

Esto define dos recintos de integración $A_1 : (-1, 0)$ y $A_2 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \left[g(x) - f(x)\right] dx = \int_{-1}^{0} \left[x^3 - x - \text{sen}\,(\pi x)\right] dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos\,(\pi x)\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{\pi} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} = \frac{8+\pi}{4\pi}$$
$$A_2 = \int_{0}^{1} \left[g(x) - f(x)\right] dx = \int_{0}^{1} \left[x^3 - x - \text{sen}\,(\pi x)\right] dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos\,(\pi x)\right]_{0}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi} = \frac{-\pi - 8}{4\pi} = -\frac{\pi + 8}{2}$$
$$\text{Area} = |A_1| + |A_2| = \frac{8+\pi}{4\pi} + \frac{\pi+8}{4\pi} = \frac{8+\pi}{2\pi} \simeq 1.773\ u^2$$