MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2024

- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a-1)y + (a+1)z = a \\ (2a-1)y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = (a^2+a)\cdot(2a-1) = a\cdot(a+1)\cdot(2a-1) = 0 \implies a = \{-1, 0, {}^1/_2\}$$

- Si $a \neq \{-1, 0, {}^1/_2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & a^2+a \\ a & 2a-1 & a+1 \\ 0 & 2a-1 & a+1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2\cdot(a+1)\cdot(2a+1)}{a\cdot(a+1)(2a+1)} = a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 1 & a & a+1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a\cdot(a+1)}{a\cdot(a+1)\cdot(2a-1)} = \frac{1}{2a-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a-1 & a \\ 0 & 2a-1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a\cdot(2a-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(2a-1)} = -\frac{1}{a+1}$$

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a=0 \implies A/A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*)=2$

  $\operatorname{ran}(A)=2=\operatorname{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones). Resolvemos las ecuaciones correspondientes al menor no nulo de la discusión:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 0-y+\lambda=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z=\lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

- Si $a={}^1\!/_2 \implies A/A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & {}^3\!/_4 & 0 \\ 1 & 0 & {}^3\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ 0 & 0 & {}^3\!/_2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & {}^3\!/_4 \\ 1 & {}^3\!/_2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & {}^3\!/_4 & 0 \\ 1 & {}^3\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ 0 & {}^3\!/_2 & 0 \end{vmatrix} = -{}^3\!/_4 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*)=3$

  $\operatorname{ran}(A)=2 \neq \operatorname{ran}(A^*)=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

———— ∘ ————

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q \cdot A \cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) (1.5 puntos) Demuestra que $A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$

b) (1 punto) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $A \cdot P \cdot Q \cdot A \overset{\odot}{=} Q^{-1} \cdot Q \cdot A \overset{\circledast}{=} Q^{-1} \cdot P^{-1}$ q.e.d.

$\odot$ $Q \cdot A \cdot P = I \xRightarrow[\text{son regulares}]{A,\ P \text{ y } Q} \underbrace{Q^{-1} \cdot Q}_{I} \cdot A \cdot P = Q^{-1} \cdot I \implies A \cdot P = Q^{-1}$

$\circledast$ $Q \cdot A \cdot P = I \implies Q \cdot A \cdot \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I} = I \cdot P^{-1} \implies Q \cdot A = P^{-1}$

b) $Q \cdot A \cdot P = I \implies \underbrace{Q^{-1} \cdot Q}_{I} \cdot A \cdot \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I} = Q^{-1} \cdot P^{-1} \implies A = (P \cdot Q)^{-1}$

$$A = \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se consideran el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, *la recta* $r \equiv \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ *y los puntos* $A(3,2,-1)$ *y* $B(1,1,-1)$. *Sea* C *la intersección entre la recta y el plano.*

a) *(1.25 puntos) Demuestra que los puntos* A, B *y* C *no están alineados.*

b) *(1.25 puntos) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos.*

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(-3,7,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-3,-1) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 7 - 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

a) $C = r \cap \pi \implies 2 \cdot (-3 + 2\lambda) + 7 - 3\lambda + \lambda - 5 = 0 \implies \lambda = 2 \implies C(1,1,-2)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-2,-1,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,-1,-1) \end{array}\right\} \implies \frac{-2}{-2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1} \implies A,\ B \text{ y } C \text{ no están alineados}$$

b) $$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |(1,-2,0)| = \frac{\sqrt{5}}{2}\ u^2$$

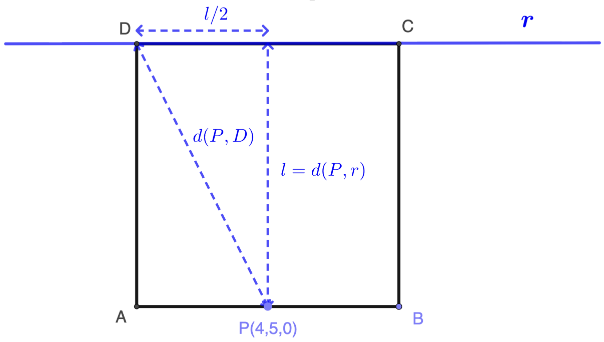
Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado.*
>
> *(Navarra - Matemáticas II - Julio 2024)*

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,1,-2) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2,4,-4) \approx (1,-2,2) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- $$\ell = d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \times \vec{d_r}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|(-12,6,12)|}{3} = \frac{18}{3} = 6$$



Los vértices C y D son dos puntos de la recta r, es decir, $D(\lambda, 1-2\lambda, -2+2\lambda)$ cuya distancia al punto P sea $d(P,D) = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{5}$

$$d(P,D) = \left|\overrightarrow{PD}\right| = |(\lambda-4, -4-2\lambda, -2+2\lambda)| = \sqrt{(\lambda-4)^2 + (-4-2\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 + 16 - 8\lambda + 16 + 4\lambda^2 + 16\lambda + 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda} = \sqrt{9\lambda^2+36} = 3\sqrt{5}$$

$$\implies 9\lambda^2 + 36 = 45 \implies \lambda^2 = 1 \implies \begin{cases} \lambda = -1 \implies \boxed{C(-1,3,-4)} \\ \lambda = 1 \implies \boxed{D(1,-1,0)} \end{cases}$$

Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)

Calcula los siguientes límites:

a) (1.25 puntos) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

b) (1.25 puntos) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\sqrt{x}\cdot \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\cdot \ln x}{\sqrt{x}}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{4}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$$

b) $$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}} = [1^\infty] = e^\lambda \overset{\odot}{=} e^2$$

$$\odot\ \lambda = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{\cancel{x-1}} \cdot \cancel{(x-1)} = \lim_{x\to 1} 2x = 2$$

Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \operatorname{sen}(\pi x)$.

a) (0.5 puntos) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$.

b) (2 puntos) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ por ser composición de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = -\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x) + \pi \cdot \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow \tan(\pi x) = 1 \implies \pi x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \implies x = \dfrac{1}{4}$

	$(0, 1/4)$	$(1/4, 1)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0, 1/4)$ y *decreciente* en $(1/4, 1)$, y tiene un *máximo relativo* en $\left(1/4, \sqrt{2}\right)$, que es también absoluto. Teniendo en cuenta que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$, la función alcanza un *mínimo absoluto* en $(1, -1)$.

Por el *Teorema de Weierstrass* si una función es continua en un intervalo, alcanza en su interior máximos y mínimos absolutos.

Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$.

a) *(1.25 puntos) Demuestra que la función es continua en el intervalo* $[-1, 3]$ *y derivable en* $(-1, 3)$.

b) *(1.25 puntos) Comprueba que existe un valor* $\alpha \in (-1, 3)$ *tal que* $f'(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Enuncia el/los resultados teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.*

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

a) $2x^2 + 2x + 3 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es continua en $[-1, 3]$. Además tenemos que $f'(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+3}}$ que es continua en $(-1, 3)$ ya que el polinomio $2x^2 + 2x + 3$ no tiene raíces reales.

b) Sea $f(x)$ una función continua en $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$. Por el *Teorema del Valor Medio* $\exists \alpha \in (-1, 3) \mid f'(\alpha) = \dfrac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ q.e.d.

Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)

Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \qquad \& \qquad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(Navarra - Matemáticas II - Julio 2024)

Solución.

- $f(x) = g(x) \implies \ln x = \dfrac{x-1}{e-1} \implies x = \{1, e\} \implies (1,0)$ y $(e,1)$.
- Los puntos de corte entre ambas funciones definen un único recinto de integración $A_1 : (1, e)$

$$H(x) = \int [f(x) - g(x)]\, dx = \int \left[\ln x - \frac{x-1}{e-1}\right] dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{array} \right\}$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{e-1} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x\right) = x \cdot \ln x - x - \frac{x^2 - 2x}{2 \cdot (e-1)} + C$$

$$A_1 = \int_1^e [f(x) - g(x)]\, dx = H(e) - H(1) = \left(e - e - \frac{e^2 - 2e}{2e-2}\right) - \left(0 - 1 - \frac{-1}{2e-2}\right)$$

$$= 1 - \frac{e^2 - 2e + 1}{2 \cdot (e-1)} = 1 - \frac{(e-1)^{\cancel{2}}}{2 \cdot \cancel{(e-1)}} = \frac{3-e}{2}$$

$$\text{Area} = |A_1| = \frac{3-e}{2} \simeq 0.1408\ u^2$$