Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a-1)y + (a+1)z = a \\ (2a-1)y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q \cdot A \cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$

(1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

P3) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ y los puntos $A\,(3,\,2,\,-1)$ y $B\,(1,\,1,\,-1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1,25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

P4) El punto $P\,(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado.

(2,5 puntos)

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$$ (1,25 puntos)

b) $$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$$ (1,25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$. (0,5 puntos)

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2,5 puntos)