MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+kz=2 \\ x+ky+3z=0 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta el sistema en función del parámetro k.*

b) *(0.5 puntos) Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.*

c) *(1 punto) Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el qe el sistema sea compatible determinado.*

(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 1 & k & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -k^2+3k-2 = -(k-1)\cdot(k-2) = 0 \implies k = \{1, 2\}$$

- Si $k \neq \{1,2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $k=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2 \cdot (2+\lambda) + 2y + 2\lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -x + \lambda = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k \neq \{1, 2\}$ por el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k \cdot \cancel{(k-2)}}{-(k-1) \cdot \cancel{(k-2)}} = \frac{k}{k-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(k-2)}}{-(k-1) \cdot \cancel{(k-2)}} = -\frac{1}{k-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-(x-1) \cdot (k-2)} = 0$$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = \mathcal{O}$, donde $\mathcal{O}$ es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

a) (0.75 puntos) Demuestre que $(A+I)^2 = 2A+I$, y que $(A+I)^3 = 3A+I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0.75 puntos) Demuestre que la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.

c) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial $X+AX=A$ expresando X en función de A.

(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

a) $(A+I)^2 = (A+I)\cdot(A+I) = \cancelto{\mathcal{O}}{A^2} + AI + IA + I^2 = 2AI + I = 2A + I$ q.e.d.

$(A+I)^3 = (A+I)\cdot(A+I)^2 = (A+I)\cdot(2A+I) = 2\cancelto{\mathcal{O}}{A^2} + AI + 2IA + I^2 = 3AI + I$
$= 3A + I$ q.e.d.,

b) $(I-A)\cdot(I+A) = I^2 + IA - AI - \cancelto{\mathcal{O}}{A^2} = I + \cancel{A} - \cancel{A} = I \implies (I-A)^{-1} = I - A$ q.e.d.

c) $X + AX = A \implies (I+A)\cdot X = A \implies \underbrace{(I+A)^{-1}\cdot(I+A)}_{I}\cdot X = (I+A)^{-1}\cdot A$

$\implies X = (I+A)^{-1}\cdot A \implies X = (I-A)\cdot A \implies X = A - \cancelto{\mathcal{O}}{A^2} \implies \boxed{X = A}$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Calcule los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

b) (0.5 puntos) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$.

c) (1 punto) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)$.

(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\cdot\operatorname{sen} x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'Hôp}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x + x\cdot\cos x}$$
$$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'Hôp}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x - x\cdot\operatorname{sen} x}=\frac{0}{2}=0$$

b) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}=\left[\frac{\infty^1}{\infty^2}\right]=0$$

c) $$\lim_{x\to +\infty} x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to +\infty}=\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'Hôp}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to +\infty} e^{1/x}=e^{1/\infty}=e^0=1$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Considere la función $f(x) = \tan^3 x$.

a) *(1.5 puntos) Calcule la integral indefinida* $\int f(x)\,dx$.

b) *(0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función* $f(x)$ *y el eje* OX *entre los valores* $x = 0$ *y* $x = \frac{\pi}{4}$.

c) *(0.25 puntos) Demuestre, sin aproximar con múmeros decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a* $\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

a) $$F(x) = \int f(x)\,dx = \int tan^3 x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \end{array} \right\} = \int tanx \cdot \tan^2 x\,dx$$
$$= \int \tan x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{u'} \cdot \underbrace{\tan x}_{u}\,dx - \int \tan x\,dx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \tan^2 x + \int \underbrace{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}_{u'/u}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

b) Hallamos los puntos de corte de la función y el eje OX

$$f(x) = \tan^3 x = 0 \implies \tan x = 0 \implies x = k\pi \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Es decir que entre las rectas $x = 0$ y $x = \pi/4$ la función $f(x)$ no corta al eje OX, lo que define un único recinto de integración $A_1 : (0, \pi/4)$.

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = F(\pi/4) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot \tan^2 x + \ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4}$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$
$$\text{Area} = |A_1| = \left|\frac{1 - \ln 2}{2}\right| = 0.1534\ u^2$$

c) $$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{e}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\cancel{\ln e}^{\,1} - \ln 2\right) = \frac{1 - \ln 2}{2} \text{ q.e.d.}$$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

a) *(1.25 puntos) Determine el valor de a y b para que el plano $\pi \equiv 2x + y + az = b$ contenga a la recta*

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) *(1.25 puntos) ¿Para qué valores de a y b corta r a π? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.*

(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(2,-1,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3,-2,-1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} ,\lambda \in \mathbb{R}$$

a) $$r \subset \pi \iff \left\{ \begin{array}{l} \vec{d_r} \perp \vec{n}_\pi = \vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = (3,-2,-1) \cdot (2,1,a) = 6 - 2 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 4} \\ R \in \pi \implies 4 - 1 + 0 = b \implies \boxed{b = 3} \end{array} \right\}$$

$$\implies \pi \equiv 2x + y + 4z = 3$$

b) $$r \cap \pi = 2 \cdot (2 + 3\lambda) - 1 - 2\lambda - a\lambda = b \implies (4 - a) \cdot \lambda = b - 3 \implies \lambda = \frac{b-3}{4-a}$$

$$\implies 4 - a \neq 0 \implies \boxed{a \neq 4} \quad \& \quad \boxed{b \in \mathbb{R}}$$

$$\text{Si } a = 0 \quad \& \quad b = 7 \implies \lambda = \frac{7-3}{4-0} = 1 \implies \boxed{P(5,-3,-1)}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Un helicóptero situado en el punto $P(1,2,1)$ *quiere aterrizar en el plano* $\pi \equiv x+y+3z=0$.

a) *(1 punto) Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a* π.

b) *(0.75 puntos) Halle dicho punto.*

c) *(0.75 puntos) Calcule la distancia que debe recorrer.*

(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

a) La trayectoria óptima será la recta perpendicular al plano que pase por P.

$$r \equiv \begin{cases} P(1,2,1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1,1,3) \end{cases} \qquad r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3} \qquad r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$$

b) $Q = r \cap \pi \Rightarrow 1+\lambda+2+\lambda+3\cdot(1+3\lambda) = 0 \implies \lambda = -\dfrac{6}{11} \implies \boxed{Q = \left(\dfrac{5}{11}, \dfrac{16}{11}, -\dfrac{7}{11}\right)}$

c) $d(P,Q) = d(P,\pi) = \dfrac{|1+2+3|}{\sqrt{1+1+9}} = \dfrac{6}{\sqrt{11}} = \dfrac{6\sqrt{11}}{11}\ u$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

En un cine hay tres salas. En la sala S_1 hay 240 espectadores, en la sala S_2 hay 180 y en la sala S_3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S_1 gusta al 40 % de los espectadores, la de la sala S_2 al 50 % y la de la sala S_3 al 90 %. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

a) *(1 punto) Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.*

b) *(0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S_3.*

c) *(1 punto) Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S_3 si le ha gustado.*

(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

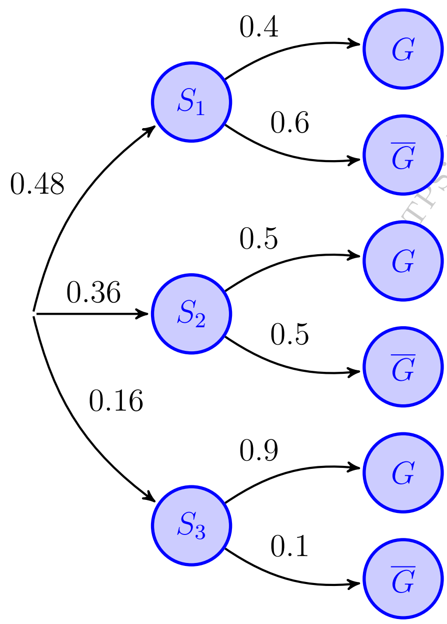
Sean los sucesos:

$S_1 \equiv$ "El espectador es de la sala S_1" $\quad$ $S_2 \equiv$ "El espectador es de la sala S_2"

$S_3 \equiv$ "El espectador es de la sala S_3" $\quad$ $G \equiv$ "Al espectador le gustó la película"

Del enunciado tenemos:

$$P(S_1) = \frac{240}{240+180+80} = 0.48 \quad \& \quad P(S_2) = \frac{180}{500} = 0.36 \quad \& \quad P(S_3) = \frac{80}{500} = 0.16$$



a) $$\begin{aligned} P(G) &= P\big((S_1 \cap G) \cup (S_2 \cap G) \cup (S_3 \cap G)\big) \\ &= P(S_1 \cap G) + P(S_2 \cap G) + P(S_3 \cap G) \\ &= P(S_1) \cdot P(G \mid S_1) + P(S_2) \cdot P(G \mid S_2) \\ &+ P(S_3) \cdot P(G \mid S_3) = 0.48 \cdot 0.4 \\ &+ 0.36 \cdot 0.5 + 0.16 \cdot 0.9 = 0.516 \end{aligned}$$

b) $P(G \mid S_3) = 0.9$

c) $$P(S_3 \mid G) = \frac{P(S_3 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(S_3) \cdot P(G \mid S_3)}{P(G)} = \frac{0.16 \cdot 0.9}{0.516} = 0.2791$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95 % de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

a) *(0.5 puntos) Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.*

b) *(0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.*

c) *(0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.*

d) *(0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.*

(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de personas que se presentan en el aeropuerto" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(280, 0.95)$

$$X : \mathcal{B}(280, 0.95) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 280 > 20 \checkmark \\ np = 266 > 5 \checkmark \\ nq = 14 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(266, 3.6469)$$

Por lo tanto el número de personas que acudirán al aeropuerto es una distribución binomial $\mathcal{B}(280, 0.95)$, que se puede aproximar por una normal $\mathcal{N}(266, 3.6469)$, cuya media es $\mu = 266$ y su desviación típica $\sigma = 3.6469$.

b) $$P(X > 260) = P(Y \geq 260.5) = P\left(Z \geq \frac{260.5 - 266}{3.6469}\right) = P(Z \geq -1.51)$$
$$= P(Z \leq 1.51) = 0.9345$$

c) $P(X \leq 260) = 1 - P(X > 260) = 1 - 0.9345 = 0.0655$

d) $$P(X = 260) = \binom{280}{260} \cdot 0.95^{260} \cdot 0.05^{20} = 0.0277$$

Aproximando por la normal tendríamos:

$$P(X = 260) = P(259.5 \leq Y \leq 260.5) = P\left(\frac{259.5 - 266}{3.6469} \leq Z \leq \frac{260.5 - 266}{3.6469}\right)$$
$$= P(-1.78 \leq Z \leq -1.51) = P(Z \leq -1.51) - P(Z \leq -1.78)$$
$$= P(Z \geq 1.51) - P(Z \geq 1.78) = 1 - P(Z \leq 1.51) - \left[1 - P(Z \leq 1.78)\right]$$
$$= 1 - 0.9345 - (1 - 0.9625) = 0.028 \text{ que no es mala aproximación.}$$