# MATEMATICAS II
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JULIO 2024
## - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2024 (Extraordinario)

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube.*
*Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagrqm, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6500 dólares.*
*Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

**Solución.**

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de seguidores en Instagram (millones)”} \\ y &\equiv \text{“Nº de seguidores en X (millones)”} \\ z &\equiv \text{“Nº de seguidores en YouTube (millones)”} \end{aligned}$$



Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=435 \\ x+\dfrac{z}{2}=2\cdot(y+z) \\ 10x+20y+30z=6500 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=435 \\ 2x-4y-3z=0 \\ x+2y+3z=650 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 650 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 0 & -6 & -5 & -870 \\ 0 & 1 & 2 & 215 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 6F_3+F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 0 & -3 & -3 & -435 \\ 0 & 0 & 7 & 420 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+95+60=435 \\ \Rightarrow -3y-3\cdot 60=-435 \\ \Rightarrow 7z=420 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=280 \\ y=95 \\ z=60 \end{array}}$$

Por lo tanto Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 en X y 60 en YouTube.

**Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)**

*Se dice que una matriz cuadrada $A$ de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A \cdot A^{\top} = I$, donde $A^{\top}$ denota la matriz traspuesta de $A$ e $I$ denota la matriz identidad de orden 2.*

*a) (1 punto) Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:*

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

*b) (0.75 puntos) Si $A$ es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.*

*c) (0.75 puntos) Justifique que si $A$ y $B$ son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

**Solución.**

a) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ la matriz es ortogonal

$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ no es ortogonal

b) $A \cdot A^{\top} = I \implies \left|A \cdot A^{\top}\right| = |A| \cdot \left|A^{\top}\right| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |I| = 1 \implies \boxed{|A| = \pm 1}$

c) $C \cdot C^{\top} = A \cdot B \cdot (A \cdot B)^{\top} = A \cdot \underbrace{B \cdot B^{\top}}_{I} \cdot A^{\top} = A \cdot I \cdot A^{\top} = A \cdot A^{\top} = I$ q.e.d

**Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)**

*Considere la función* $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x + 3}$, *definida para todo valor de* $x \in \mathbb{R}$.

a) *(0.5 puntos) Calcule* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) *(1.5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).*

c) *(0.5 puntos) Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

**Solución.**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x + 3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2 + 2x + 3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{2}{1} = 2$

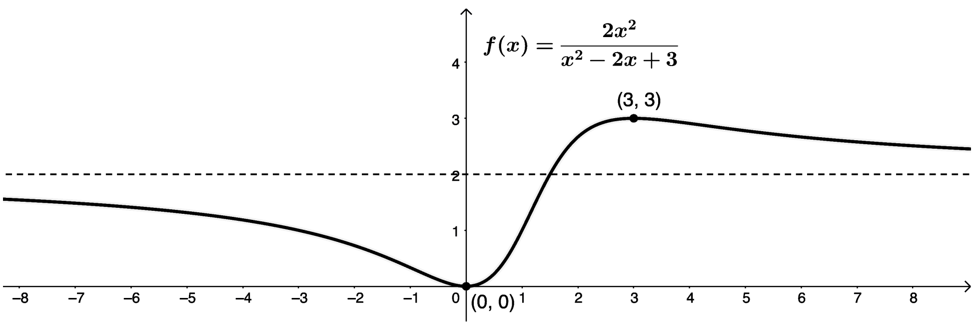
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x + 3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{2}{1} = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{4x\cdot(x^2-2x+3) - 2x^2\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} = \dfrac{-4x\cdot(x-3)}{(x^2-2x+3)^2} = 0 \implies x = \{0, 3\}$

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ |

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0, 3)$ y *decreciente* en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 0)$ y un *máximo relativo* en $(3, 3)$.

c) Por el apartado a) vemos que hay una asíntota en $y = 2$, que es inferior al *máximo relativo* $(3, 3)$ y superior al *mínimo relativo* $(0, 0)$, por lo que los extremos hallados en el apartado anterior son *absolutos*.



**Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)**

*Considere la función* $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, *definida para todo valor de* $x > 0$.

a) *(0.5 puntos) Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) *(1.5 puntos) Calcule la integral indefinida* $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

c) *(0.5 puntos) Determine el valor de* $a > 0$ *para el cual se cumple* $\displaystyle\int_1^a f(x)\,dx = 4$.

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

**Solución.**

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

b) $$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dv & \Rightarrow v = 2\sqrt{x} \end{array} \right\} = 2\sqrt{x}\cdot \ln x$$

$$- \int \frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - \int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\cdot \ln x - 4\sqrt{x} + C$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot(\ln x - 2) + C$$

c) $$\int_1^a f(x)\,dx = F(a) - F(1) = \left[2\sqrt{a}\cdot(\ln a - 2)\right] - \left[2\cdot(\overset{0}{\cancel{\ln 1}} - 2)\right]$$

$$= 2\sqrt{a}\cdot(\ln a - 2) + \cancel{4} = \cancel{4} \implies \begin{cases} 2\sqrt{a} = 0 \Rightarrow \cancel{a = 0}\ (a > 0) \\ \ln a - 2 = 0 \Rightarrow \ln a = 2 \Rightarrow \boxed{a = e^2} \end{cases}$$

**Ejercicio 5 (2.5 *puntos*)**

*Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.*

a) *(0.75 puntos) Compruebe que ambos planos se cortan en una recta $r$ y calcule la ecuación continua de dicha recta.*

b) *(1 punto) Compruebe que el punto $P$ no está en ningúno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por $P$ y no corta a ninguno de los dos planos.*

c) *(0.75 puntos) Determine el punto de la recta $r$ que equidista de $P$ y de $Q$.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

**Solución.**

a) $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-1}{1} = \dfrac{1}{-1} \implies \vec{n}_{\pi_1} \nparallel \vec{n}_{\pi_2} \implies r = \pi_1 \cap \pi_2$

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \implies r \equiv \begin{cases} R(1,1,0) \\ \vec{d}_r=(0,1,1) \end{cases}$$

$$r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

b) $¿P \in \pi_1? \implies 1-2+3 \neq 0 \implies P \notin \pi_1$

$¿P \in \pi_2? \implies 1+2-3 \neq 2 \implies P \notin \pi_2$

$$s \equiv \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{d}_s = \vec{d}_r = (0,1,1) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2+\mu \\ z=3+\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

c) Sea $R(1, 1+\lambda, \lambda)$ un punto genérico de la recta $r$.

$d(P,R) = d(Q,R) \implies \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right|$

$\implies \sqrt{0+(-1+\lambda)^2+(-3+\lambda)^2} = \sqrt{0+\lambda^2+(-3+\lambda)^2}$

$\implies 2\lambda^2-8\lambda+10 = 2\lambda^2-6\lambda+9 \implies 2\lambda = 1 \implies \lambda = 1/2 \implies \boxed{R\left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)}$

**Ejercicio 6 (2.5 *puntos*)**

*Considere los planos* $x+y+z=-3$ *y* $x+y-z=3$ *y la recta* $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$.

a) *(0.75 puntos) Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.*

b) *(0.75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta* $r$ *con el plano* $x+y-z=3$.

c) *(1 punto) Determine los puntos de la recta* $r$ *que equidistan de ambos planos.*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

**Solución.**

$$r \equiv \begin{cases} R(1,-1,0) \\ \vec{d_r} = (2,1,3) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} ,\lambda \in \mathbb{R}$$

a) $\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1} \implies \vec{n}_{\pi_1} \nparallel \vec{n}_{\pi_2} \implies \pi_1 \cap \pi_2$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|(1,1,1)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \implies \boxed{\alpha = 70.53^\circ}$$

b) $\vec{d_r} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = (2,1,3)\cdot(1,1,-1) = 2+1-3 = 0 \implies \vec{d_r} \perp \vec{n}_{\pi_2} \implies \left\{ \begin{array}{c} r \parallel \pi_2 \\ r \subset \pi_2 \end{array} \right\}$

$\xRightarrow{¿R \in \pi_2?} 1-1 \neq 3 \xRightarrow{R \notin \pi_2} r \parallel \pi_2$

c) Sea $P(1+2\lambda, -1+\lambda, 3\lambda)$ un punto genérico de $r$.

$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \xRightarrow{r \parallel \pi_2} d(P,\pi_1) = d(R,\pi_2)$ (todo $r$ está a la misma distancia de $\pi_2$)

$$\Rightarrow \frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1-1-3|}{\sqrt{1+1+1}} \Rightarrow \frac{|3+6\lambda|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow |3+6\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3+6\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \boxed{P_1(-1,-2,-3)} \\ 3+6\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{P_2(1,-1,0)} \end{cases}$$

**Ejercicio 7 (2.5 *puntos*)**

*El 60 % de los habitantes de una población consume pan integral, el 40 % consume pan blanco y el 20 % consume ambos tipos de pan.*

*a) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco"?*

*b) (0.5 puntos) Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?*

*c) (0.75 puntos) Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.*

*d) (0.75 puntos) Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$I \equiv \text{“Consumir pan integral”}$$
$$B \equiv \text{“Consumir pan blanco”}$$



Del enunciado tenemos:

$$P(I) = 0.6 \qquad \& \qquad P(B) = 0.4 \qquad \& \qquad P(I \cap B) = 0.2$$

a) $P(I) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24 \neq P(I \cap B) = 0.2 \implies I$ y $B$ no son independientes

b) $P(B \mid I) = \dfrac{P(B \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0.2}{0.6} = \dfrac{1}{3} \simeq 0.3333$

c) $P(\overline{I} \cap \overline{B}) = P(\overline{I \cup B}) = 1 - P(I \cup B) = 1 - \Big[P(I) + P(B) - P(I \cap B)\Big]$

$= 1 - (0.6 + 0.4 - 0.2) = 0.2 \implies 20\,\%$

d) $P(B \mid \overline{I}) = \dfrac{P(B \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \dfrac{P(B) - P(B \cap I)}{1 - P(I)} = \dfrac{0.4 - 0.2}{1 - 0.6} = 0.5$

**Ejercicio 8 (2.5 *puntos*)**

*Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2 %, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:*

*a) (0.5 puntos) ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?*

*b) (0.5 puntos) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.*

*c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?*

*d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?*

*(Región de Murcia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

**Solución.**

a) $X \equiv$ "Nº de microprocesadores defectuosos" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(2500, 0.02)$

b) $\mu = np = 2500 \cdot 0.02 = 50 \qquad \& \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.02 \cdot 0.98} = 7$

c) $X : \mathcal{B}(2500, 0.02) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 2500 > 20 \checkmark \\ np = 50 > 5 \checkmark \\ nq = 2450 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(50, 7)$

$$P(X \leq 57) = P(Y \leq 57.5) = P\left(Z \leq \frac{57.5 - 50}{7}\right) = P(Z \leq 1.07) = 0.8577$$

d) $P(X = 50) = \binom{2500}{50} \cdot 0.02^{50} \cdot 0.98^{2450} = 0.0569$

Podemos resolver este apartado aproximando a la normal aunque con un cierto error

$$\begin{aligned} P(X = 50) &= P(49.5 \leq Y \leq 50.5) = P\left(\frac{49.5 - 50}{7} \leq Z \leq \frac{50.5 - 50}{7}\right) \\ &= P(-0.07 \leq Z \leq 0.07) = P(Z \leq 0.07) - P(Z \leq -0.07) \\ &= P(Z \leq 0.07) - P(Z \geq 0.07) = P(Z \leq 0.07) - \Big[1 - P(Z \leq 0.07)\Big] \\ &= 0.5279 - (1 - 0.5279) = 0.0558 \end{aligned}$$