# MATEMATICAS II
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JULIO 2025
## - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2025 (Extraordinario)
# Bloque Análisis

**Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)**

*El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.*
*Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.*
*Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de $t$ meses con la función:*

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159 \cdot e^{-0.5t}}$$

*a) (0.25 puntos) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?*

*b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.*

*c) (0.75 puntos) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.*

*d) (0.75 puntos) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?*

*(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción Unica - Análisis)*



**Solución.**

a) $H(0) = \dfrac{6400}{1 + 159 \cdot e^{0}} = 40$ hormigas al inicio

b) $TVM[0,12] = \dfrac{H(12) - H(0)}{12 - 0} = \dfrac{\frac{6400}{1+159\cdot e^{-6}} - 40}{12} = \dfrac{4591 - 40}{12} = 379$ hormigas/mes

$TVM[12,24] = \dfrac{H(24) - H(12)}{24 - 12} = \dfrac{\frac{6400}{1+159\cdot e^{-12}} - 4591}{12} = \dfrac{6394 - 4591}{12} = 150$ horm./mes

Esto quiere decir que durante el primer año la colonia de hormigas crece a razón de 379 hormigas/mes, mientras que durante el segundo año el ritmo de crecimiento baja hasta las 150 hormigas cada mes.

c) Vamos a estudiar la monotonía de la función $H(t)$ para analizar la verosimilitud de la afirmación.

$H'(t) = \dfrac{-6400 \cdot (-159 \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5})}{(1 + 159 \cdot e^{-0.5t})} = \dfrac{508800 \cdot e^{-0.5}}{(1 + 159 \cdot e^{-0.5t})^2} > 0 \ \forall t \in (0, +\infty)$

La población de hormigas es siempre creciente y con el tiempo tiende a:

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6400}{1+159\cdot e^{-0.5t}} = 6400 \text{ hormigas}$$

Por lo tanto es cierta la parte de la afirmación que dice que la población de hormigas siempre es creciente, pero no es cierto que este crecimiento sea descontrolado pues tiende a un valor de 6400 hormigas, que sería su capacidad de carga.

d) Veamos cuándo la colonia alcanza las $\frac{6400}{2} = 3200$ hormigas (mitad de la capacidad de carga).

$$H(t) = \frac{6400}{1+159\cdot e^{-0.5t}} = 3200 \implies 2 = 1 + 159\cdot e^{-0.5t} \implies \frac{1}{159} = \frac{1}{e^{0.5t}}$$

$$\implies 159 = e^{0.5t} \implies \ln 159 = 0.5t \implies t = \frac{\ln 159}{0.5} \implies t \simeq 10.14 \text{ meses}$$

# Bloque Algebra

**Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)**

*En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20 % de proteína, un 10 % de grasa y un 10 % de carbohidratos: harinas que aportan un 40 % de proteínas, un 20 % de grasa y un 30 % de carbohidratos, y subproductos cárnicos que aportan un 60 %, 10 % y 30 % respectivamente.*
*Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36 % de proteína, un 12 % de grasa y un 20 % de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?*

*(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Algebra)*

**Solución.**

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Cantidad de subproductos vegetales (kg)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de harinas (kg)”}$$
$$z \equiv \text{“Cantidad de subproductos cárnicos (kg)”}$$

Ponemos los datos del enunciado en una tabla de contingencia:

| | Subproductos vegetales | Harinas | Subproductos cárnicos | Total (g) |
|---|---|---|---|---|
| Proteínas | 0.2 | 0.4 | 0.6 | $0.36 \cdot 1000$ |
| Grasas | 0.1 | 0.2 | 0.1 | $0.12 \cdot 1000$ |
| Carbohidratos | 0.1 | 0.3 | 0.3 | $0.2 \cdot 1000$ |



Escribimos el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{cases} 0.2x + 0.4y + 0.6z = 360 \\ 0.1x + 0.2y + 0.1z = 120 \\ 0.1x + 0.3y + 0.3z = 200 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1800 \\ x + 2y + z = 1200 \\ x + 3y + 3z = 2000 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1800 \\ 1 & 2 & 1 & 1200 \\ 1 & 3 & 3 & 2000 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1800 \\ 0 & 0 & -2 & -600 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 300 = 1800 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = -600 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 200 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 500 \\ y = 200 \\ z = 300 \end{array}}$$

**Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)**

*Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:*

$$\begin{cases} 4X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{cases}$$

*(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Algebra)*

**Solución.**

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} 4X - 5Y = A & \xrightarrow{\times(3)} & \cancel{12X} - 15Y = 3A \\ 6X + 4Y = B & \xrightarrow{\times(-2)} & \underline{-\cancel{12X} - 8Y = -2B} \\ & & -23Y = 3A - 2B \Longrightarrow \boxed{Y = \frac{1}{23} \cdot (2B - 3A)} \\ & & 4X - 5Y = A \qquad \Longrightarrow \boxed{X = \frac{1}{46} \cdot (4A + 5B)} \end{array}$$

$$X = \frac{1}{46} \cdot \left[ 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \right] \Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$Y = \frac{1}{23} \cdot \left[ 2 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \right] \Longrightarrow \boxed{Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

# Bloque Geometría

**Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)**

*En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:*

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \qquad \& \qquad \pi \equiv x-y+2z-5=0$$

*a) (1.5 puntos) Comprobar que el plano $\pi$ y la recta $r$ se cortan. Dar la ecuación de la recta $s$, contenida en el plano $\pi$, que corta perpendicularmente a $r$.*

*b) (1 punto) Hallar el ángulo que forman la recta $r$ y el plano $\pi$.*

*(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Geometría)*

**Solución.**

$$r \equiv \begin{cases} R(0,-5,5) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,1,-3) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -5+\lambda \\ z = 5-3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) $\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = (2,1,-3)\cdot(1,-1,2) = 2-1-6 = -5 \neq 0 \Longrightarrow r$ y $s$ se cortan en un punto

$$P = r \cap \pi \Longrightarrow 2\lambda - (-5+\lambda) + 2\cdot(5-3\lambda) - 5 = 0 \xrightarrow{\lambda=2} P(4,-3,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} s \subset \pi \Longrightarrow \vec{d_s} \perp \vec{n_\pi} \\ s \perp r \Longrightarrow \vec{d_s} \perp \vec{d_r} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{d_s} = \vec{n_\pi} \times \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1,7,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} r \cap s \\ s \subset \pi \end{array}\right\} \Longrightarrow P \in s \Longrightarrow s \equiv \begin{cases} P(4,-3,-1) \\ \vec{d_s} = (1,7,3) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4+\mu \\ y = -3+7\mu \\ z = -1+3\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

b) $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\vec{d_r}\cdot\vec{n_\pi}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|\cdot\left|\vec{n_\pi}\right|} = \frac{|-5|}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{2\sqrt{21}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 33.06^\circ}$$

**Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)**

*En el espacio tridimensional, se tienen las siguientes rectas:*

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2z=3 \\ 2x+y-6z=2 \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$$

*a) (1.5 puntos) Comprobar que $r$ y $s$ son coplanarias.*

*b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que las contiene.*

*(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Geometría)*

**Solución.**

$$r \equiv \begin{cases} R(-1,4,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-4,2,-1) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-4\lambda \\ y=4+2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} ,\lambda \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv \begin{cases} S(1,0,-1) \\ \vec{d_s}=(1,3,2) \end{cases} \Longrightarrow s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=3\mu \\ z=-1+2\mu \end{cases} ,\mu \in \mathbb{R}$$

a) $$P=r\cap s = \begin{cases} -1-4\lambda=1+\mu \xrightarrow[\mu=6/7]{\lambda=-5/7} -1-4\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=1+\frac{6}{7} \checkmark \\ 4+2\lambda=3\mu \xrightarrow{\lambda=1-2\mu} 4+2\cdot(1-2\mu)=3\mu \Rightarrow \mu={}^{6}/_{7} \\ -\lambda=-1+2\mu \Rightarrow \lambda=1-2\mu \xrightarrow{\mu=6/7} \lambda=-{}^{5}/_{7} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{13}{7},\frac{18}{7},\frac{5}{7}\right)$$

Como las rectas $r$ y $s$ se cortan en el punto $P$, entonces son coplanarias.

b) $$\pi \equiv \begin{cases} R(-1,4,0) \\ \vec{d_r}=(-4,2,-1) \\ \vec{d_s}=(1,3,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow 7\cdot(x+1)+7\cdot(y-4)-14z=0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv x+y-2z-3=0}$$

# Bloque Probabilidad

**Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)**

*Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1 % de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95 %, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98 %. Se selecciona al azar un individuo de la población:*

*a) (1.5 puntos) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo.*

*b) (1 punto) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test?*

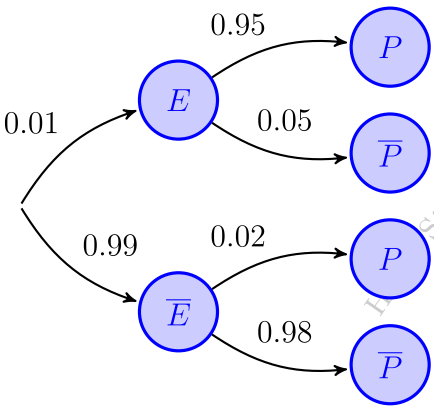
*(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Probabilidad)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“La persona está enferma”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo para la enfermedad”}$$






a)
$$\begin{aligned} P(P) &= P\big((E\cap P)\cup(\overline{E}\cap P)\big) \\ &= P(E\cap P) + P(\overline{E}\cap P) \\ &= P(E)\cdot P(P\mid E) + P(\overline{E})\cdot P(P\mid \overline{E}) \\ &= 0.01\cdot 0.95 + 0.99\cdot 0.02 = 0.0293 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E\mid P) &= \frac{P(E\cap P)}{P(P)} = \frac{P(E)\cdot P(P\mid E)}{P(P)} \\ &= \frac{0.01\cdot 0.95}{0.0293} = 0.3242 \end{aligned}$$

b) $P(E\mid \overline{P}) = \dfrac{P(E\cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{P(E)\cdot P(\overline{P}\mid E)}{1-P(P)} = \dfrac{0.1\cdot 0.05}{1-0.0293} = 0.000515$

$35000\cdot P(E\mid \overline{P}) \simeq 18.028 \simeq 18$, luego la afirmación de que habría más de 50 enfermas con test negativo no es correcta.

**Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)**

*El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).*
*Para ello se ha llevado a cabo una encuesta a* 1800 *estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el* 27 % *de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.*

*a) (1.75 puntos) Comprobar si hay más de un* 90 % *de posibilidades de recibir entre* 460 *y* 510 *solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria.*

*b) (0.75 puntos) A partir de* 525 *solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida?*

*(Islas Canarias - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Probabilidad)*

**Solución.**



$$X \equiv \text{“Nº de estudaintes que solicitan plaza de entre 1800”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(1800, 0.27)$$

a) $$X : \mathcal{B}(1800, 0.27) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 1800 > 20 \checkmark \\ np = 486 > 5 \checkmark \\ nq = 1324 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(486, 18.836)$$

$$\begin{aligned} P(460 \le X \le 510) &= P(459.5 \le Y \le 510.5) = P\Big(\frac{459.5 - 486}{18.836} \le Z \le \frac{510.5 - 486}{18.836}\Big) \\ &= P(-1.41 \le Z \le 1.3) = P(Z \le 1.3) - P(Z \le -1.41) \\ &= P(Z \le 1.3) - P(Z \ge 1.41) = P(Z \le 1.3) - \Big[1 - P(Z \le 1.41)\Big] \\ &= 0.9032 - (1 - 0.9207) = 0.8239 \implies 82.39\,\% \text{ menos del } 90\,\% \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(X \ge 525) &= P(Y \ge 524.5) = P\Big(Z \ge \frac{524.5 - 486}{18.836}\Big) = P(Z \ge 2.04) \\ &= 1 - P(Z \le 2.04) = 1 - 0.9793 = 0.0207 \end{aligned}$$