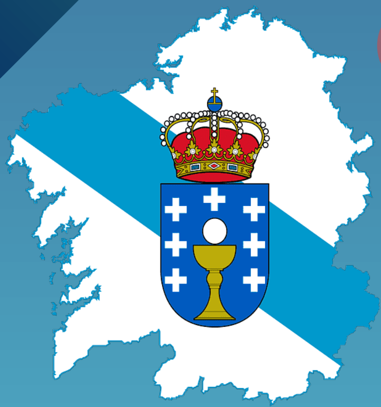
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.
Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80 % son zapatillas tradicionales y el 20 % zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75 % están en buen estado, pero solo el 50 % de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

a) *¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?*

b) *Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?*

c) *Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos "ser blancas" y "ser de diseño" son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?*

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción Unica - Extraordianrio)

Solución.

$T \equiv$ "Las zapatillas son tradicionales" $\quad D \equiv$ "Las zapatillas son de diseño"

$B \equiv$ "Las zapatillas están en buen estado" $\quad W \equiv$ "Las zapatillas son blancas"

Rellenamos en la tabla el número de zapatillas de cada tipo. Así: $T = 0.8 \cdot 60 = 48 \Rightarrow D = 60 - T = 60 - 48 = 12 \Rightarrow T \cap B = 0.5 \cdot 48 = 24 \Rightarrow D \cap B = 0.75 \cdot 12 = 9$

	B	$\overline{B}$	**Total**
T	24	24	48
D	9	3	12
Total	33	27	60

a) $$P(T \cup B) = P(T) + P(B) - P(T \cap B) = \frac{48 + 33 - 24}{60} = 0.95$$

b) $$P(B \cap D) = \frac{9}{60} = 0.15$$

c) $$P(D \cap W) \underset{Indep.}{\overset{D\ y\ W}{=}} P(D) \cdot P(W) = \frac{12}{60} \cdot P(W) = 0.2 \cdot P(W)$$

$$P(W) = P(D \cap W) + P(T \cap W) = 0.2 \cdot P(W) + \frac{8}{60} \Longrightarrow P(W) = \frac{1}{6}$$

$$P(D \cap W) = 0.2 \cdot P(W) = 0.2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \xRightarrow[\text{pares}]{\times 60} \boxed{\text{2 blancas de diseño}}$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible.*

b) *Para $k = 0$, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^\top$ siendo $A^\top$ la traspuesta de A.*

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordianrio)

Solución.

a) $|A| = 1 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall k \in \mathbb{R}$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k+1 & -2 \\ -2k & k & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k & 2 \\ -2k+1 & k & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para $k = 0 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AX - A = B^2 + A^\top \implies AX = B^2 + A^\top + A$$

$$\implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot \left(B^2 + A^\top + A\right) \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot \left(B^2 + A^\top + A\right)}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\begin{cases} x+my+z=m \\ x+(3-m)z=2m \\ my+2z=3m \end{cases}$$

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordianrio)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 0 & 3-m & 2m \\ 0 & m & 2 & 3m \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m^2-4m = m\cdot(m-4) = 0 \implies m = \{0,4\}$$

- Si $m \neq \{0,4\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m=0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $m=4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 12 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = -64 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

a) *Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.*

b) *Calcule* $\int e^x \cdot \cos(3x)\, dx$.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordianrio)

Solución.

a) `Th. del valor medio:` Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists\, c \in (a, b) \mid f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

b) $$\underbrace{\int e^x \cdot \cos(3x)\, dx}_{I} = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & \Rightarrow du = e^x\, dx \\ dv = \cos(3x)\, dx & \Rightarrow v = \dfrac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}(3x) \end{array} \right\} = \frac{e^x}{3} \cdot \operatorname{sen}(3x)$$

$$-\int \frac{e^x}{3} \cdot \operatorname{sen}(3x)\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & \Rightarrow du = e^x\, dx \\ dv = \dfrac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}(3x)\, dx & \Rightarrow v = -\dfrac{1}{9} \cdot \cos(3x) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{e^x}{3} \cdot \operatorname{sen}(3x) + \frac{e^x}{9} \cdot \cos(3x) - \frac{1}{9} \underbrace{\int e^x \cdot \cos(3x)\, dx}_{I}$$

$$I = \frac{e^x}{9} \cdot \Big[3 \cdot \operatorname{sen}(3x) + \cos(3x)\Big] - \frac{1}{9} \cdot I \Longrightarrow \boxed{I = \frac{e^x}{10} \cdot \Big]3 \cdot \operatorname{sen}(3x) + \cos(3x)\Big] + C}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{4x} & ,\ si\ x<0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} & ,\ si\ x\geq 0 \end{cases}$$

se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en $x=0$.

b) Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en $x=0$.

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x=-1$.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordianrio)

Solución.

a) `Continuidad en` $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \implies f(x)$ es continua en $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot e^{4x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=0$
- $f(0)=\dfrac{\ln 1}{1}=0$

b) `Derivabilidad en` $x=0$: $f'(0^-)=f'(0^+) \implies f(x)$ es derivable en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} (1+4x)\cdot e^{4x} & ,\ \text{si } x<0 \\ \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} & ,\ \text{si } x>0 \end{cases}$$

- $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)\cdot e^{4x}=1$
- $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=1$

c) $x_0=-1 \implies y_0=f(x_0)=f(-1)=-e^{-4}=-1/e^4 \implies (x_0,y_0)=(-1,-1/e^4)$

$m_r=f'(x_0)=f'(-1)=-3e^{-4}=-\dfrac{3}{e^4}$

$r\equiv y-y_0=m_r\cdot(x-x_0) \implies y+\dfrac{1}{e^4}=-\dfrac{3}{e^4}\cdot(x+1) \implies \boxed{r\equiv y=-\dfrac{3}{e^4}x-\dfrac{4}{e^4}}$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Considérense los planos $\pi \equiv 2x+3y+z+1=0$ *y* $\pi' \equiv x+z-1=0$ *y los puntos* $A(2,1,0)$ *y* $B(-1,-2,3)$.

a) Calcule la distancia del punto A *al plano paralelo a* π *que pasa por* B.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π *y* π'.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A - Extraordianrio)

Solución.

a) $$\pi_1 \equiv \begin{cases} B(-1,-2,3) \\ \vec{n}_{\pi_1} = \vec{n}_{\pi} = (2,3,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 \equiv 2x+3y+z+D=0 \xrightarrow{B\in\pi_1} -2-6+3+D=0$$

$$\Longrightarrow D=5 \Longrightarrow \pi_1 \equiv 2x+3y+z+5=0$$

$$d(A,\pi_1) = \frac{|4+3+5|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7}\ u$$

b) $$r \equiv \begin{cases} \pi \equiv 2x+3y+z+1=0 \\ \pi' \equiv x+z-1=0 \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} R(1,-1,0) \\ \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3,-1,-3) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ *y* $s \equiv \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$.

a) Calcule la posición relativa de las rectas r y s.

b) Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B - Extraordianrio)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,2,1) \\ \vec{d_r} = (2,-1,1) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(2,1,1) \\ \vec{d_s} = (4,-2,2) \approx (2,-1,1) \end{cases} \quad \& \quad \overrightarrow{RS} = (1,-1,0)$$

a) $$\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} r \parallel s \\ r \equiv s \end{array} \right\} \xRightarrow{¿R \in s?} \frac{1-2}{4} \neq \frac{2-1}{-2} \neq \frac{1-1}{2} \xRightarrow{R \notin s} r \parallel s$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} R(1,2,1) \\ \vec{d_r} = (2,-1,1) \\ \overrightarrow{RS} = (1,-1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow x - 1 + y - 2 - (z-1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv x + y - z - 2 = 0}$$