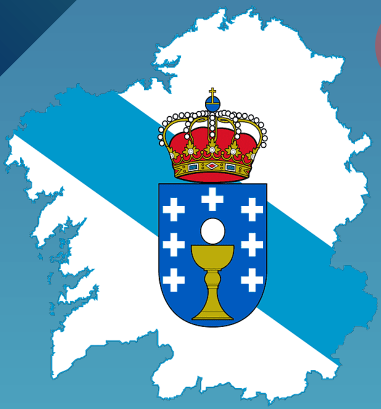
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2024
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2024 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, *dé respuesta a los dos apartados siguientes:*

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

a) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ antisimétrica $\iff X = -X^{\top} \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$

$$\implies \begin{cases} a = -a \implies a = 0 \\ b = -c \\ c = -b \\ d = -d \implies d = 0 \end{cases} \implies X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

$$XA = AX \implies \cancel{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \cancel{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} x & y \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -y & x \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \boxed{x = -1} \\ \boxed{y = 1} \\ -1 = -y \xRightarrow{y=1} -1 = -1 \checkmark \\ -1 = x \checkmark \end{cases}$$

b) $2M = A^{-1} - AM \implies 2M + AM = A^{-1} \implies (2I + A) \cdot M = A^{-1}$

$$\implies \underbrace{(2I + A)^{-1} \cdot (2I + A)}_{I} \cdot M = (2I + A)^{-1} \cdot A^{-1} \implies M = \left[A \cdot (2I + A)\right]^{-1}$$

$$\implies \boxed{M = (2A + A^2)^{-1}}$$

Para $x = -1$ e $y = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$2A + A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|2A + A^2| = 20 \quad \& \quad (2A + A^2)^{-1} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \implies \boxed{M = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=m \\ x-y+2z=2m \\ mx+3z=m \end{cases}$$

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3m-9=0 \implies m=3$$

- Si $m \neq 3$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=\text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m=3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*)=3$

  $\text{ran}(A)=2 \neq \text{ran}(A^*)=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & , \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{k - x \cdot e^x}{x} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b?

b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

a) `Continuidad en` $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ continua en $x = 0 \iff k = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + bx - 1 \right) = -1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{k - x \cdot e^x}{x} = \left[\dfrac{k}{0} \right] = \left\{ \neq \infty \iff \boxed{k = 0} \right\} = \left[\dfrac{0}{0} \right]$

  $\stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^x \cdot (1 + x)}{1} = -1$
- $f(0) = -1$

b) Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$ ha de ser continua en $x = 0 \implies \boxed{k = 0}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & , \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{-x^2 \cdot e^x}{x^2} = -e^x & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- $f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x + b) = b$
- $f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-e^x) = -1$

$f(x)$ es derivable en $x = 0 \iff f'(0^-) = f'(0^+) \implies \boxed{b = -1}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)*

Solución.

Hallamos los puntos de corte entre las funciones $f(x) = -2x$ y $g(x) = ax^2 + 4x$

$$f(x) = g(x) \implies -2x = ax^2 + 4x \implies ax^2 + 6x = x \cdot (ax + 6) = 0 \implies x = \{0, -6/1\}$$

Lo que, teniendo en cuenta que $a > 0$, define un único recinto de integración $A_1 : (-6/a, 0)$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-6/a}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-6/a}^{0} \left(-ax^2 - 6x\right) dx = -\frac{ax^3}{3} - 3x^2 \Big]_{-6/a}^{0} \\ &= 0 - \left(\frac{72}{a^2} - \frac{108}{a^2}\right) = \frac{36}{a^2} \\ \text{Area} &= |A_1| = \frac{36}{a^2} = 9 \implies a^2 = 4 \xRightarrow{a>0} \boxed{a = 2} \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Considérense el plano $\pi \equiv x+2y-2z=0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} B(0,1,1) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{BA} = (2,0,1) \end{cases} \qquad \& \qquad \vec{n}_\pi = (1,2,-2)$$

a) $\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = (2,0,1)\cdot(1,2,-2) = 2-2 = 0 \implies \vec{d_r} \perp \vec{n}_\pi \implies \left\{ \begin{array}{c} r \parallel \pi \\ r \subset \pi \end{array} \right\}$

$\xRightarrow{¿B \in \pi?} 0+2-2=0 \checkmark \xRightarrow{B\in\pi} r \subset \pi$

b) $$\pi' \equiv \begin{cases} B(0,1,1) \\ \vec{d_r} = (2,0,1) \\ \vec{n}_\pi = (1,2,-2) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -2x + 5\cdot(y-1) + 4\cdot(z-1) = 0 \implies \boxed{\pi' \equiv 2x-5y-4z+9=0}$$

Ejercicio 6 (2 *puntos*)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Se piden las ecuaciones paramétricas de r, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} A(-1,3,-5) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,0) \end{cases} \implies \boxed{r \equiv \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -5 \end{cases} ,\lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} C(5,0,1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_r} = (2,-1,0) \end{cases} \implies 2x-y+D=0 \xRightarrow{C\in\pi} 10+D=0 \implies D=-10$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv 2x-y-10=0}$$

$$P = r\cap\pi \implies 2\cdot(-1+2\lambda)-(3-\lambda)-10=0 \implies \lambda=3 \implies \boxed{P(5,0,-5)}$$

Ejercicio 7 (2 *puntos*)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13 % de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

$$X \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de huevos infértiles de entre 7”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(7, 0.13)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Big[P(X = 0) + P(X = 1)\Big] = 1 - \Bigg[\binom{7}{0} \cdot 0.13^0 \cdot 0.87^7 + \binom{7}{1} \cdot 0.13^1 \cdot 0.87^6\Bigg] = 1 - 0.7719 = 0.2281$$

Ejercicio 8 (2 *puntos*)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98.5 %? de estos aparatos

(Galicia - Matemáticas II - Julio 2024 - Extraordinario)

Solución.

$$X \equiv \text{“Durabilidad del aparato (miles horas)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(20, 2.5)$$

a) $P(X \leq 17) = P\Big(Z \leq \dfrac{17-20}{2.5}\Big) = P(Z \leq -1.2) = P(Z \geq 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2)$
$= 1 - 0.8849 = 0.1151$

b) $P(X \geq a) = P\Big(Z \geq \dfrac{a-20}{2.5}\Big) = P\Big(X \leq -\dfrac{a-20}{2.5}\Big) = 0.985$
$\xRightarrow{Tabla} -\dfrac{a-20}{2.5} = 2.17 \implies a = 14.575 \implies \boxed{14575 \ horas}$