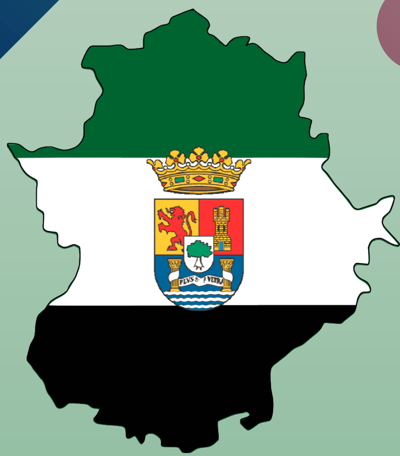
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones con $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) (1 punto) Resolverlo para el caso $m = 1$.

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2025 - Extraordinario - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 7 & 5 & 0 \\ 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m^2 - m - 2 = 0 \implies m = \{-1, 2\}$$

- Si $m \neq \{-1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 1$ por el método de Gauss teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 6F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \Rightarrow x + 7 \cdot \frac{5}{2} + 5 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow -6y - 4 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 3 \\ \Rightarrow 2z = -9 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 5/2 \\ z = -9/2 \end{array}}$$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) *(1.25 puntos) Obtener la inversa de la matriz* $A^\top + I$*, donde* I *es la matriz unidad de orden* 3.

b) *(1.25 puntos) Resolver la ecuación matricial* $A^\top X - I = 2B - X$ *(*$A^\top$ *es la matriz traspuesta de* A*).*

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2025 - Extraordinario - Opción B)

Solución.

a) $A^\top + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ & $\left|A^\top + I\right| = 1$

$\text{Adj}\ (A^\top + I) = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ & $\left(A^\top + I\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^\top X - I = 2B - X \implies A^\top X + X = 2B + I \implies \left(A^\top + I\right) \cdot X = 2B + I$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(A^\top + I\right)^{-1} \cdot \left(A^\top + I\right)}_{I} \cdot X = \left(A^\top + I\right)^{-1} \cdot (2B + I) \Rightarrow \boxed{X = \left(A^\top + I\right)^{-1} \cdot (2B + I)}$$

$$X = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -22 \\ -9 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

> a) *(1.25 puntos) Dada la función* $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x^3}$*, calcula los valores de* a *y* b *sabiendo que* $f(x)$ *tiene un máximo relativo en el punto* $P(1,2)$.
>
> b) *(1.25 puntos) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular* $a=2$, $b=-2$.
>
> *(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2025 - Extraordinario - Opción A)*

Solución.

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x^3} \qquad \& \qquad f'(x) = \frac{-ax^2-3b}{x^4} \qquad \& \qquad f''(x) = \frac{2ax^2+12b}{x^5}$$

a)
- Pasa por $(1,2) \Rightarrow f(1) = 2 \implies a+b = 2 \xrightarrow{a=-3b} -2b = 2 \implies \boxed{b=-1}$
- Máximo en $x=1 \Rightarrow f'(1) = 0 \implies -a-3b = 0 \implies a = -3b \xrightarrow{b=-1} \boxed{a=3}$
- Comprobamos máximo en $x=1 \implies f''(1) = 2a+12b = -6 < 0 \xrightarrow{(\cap)}$ Máx. ✓

b) Para $a=2$ & $b=-2 \implies f(x) = \dfrac{2x^2-2}{x^3}$ & $f'(x) = \dfrac{-2x^2+6}{x^4}$

- `Dominio:` $x^3 = 0 \implies x = 0 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-2}{x^3} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-2}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow \underset{x\to\pm\infty}{\exists\, A.H.}$ en $y=0$
- `Monotonía:` $f'(x) = \dfrac{-2x^2+6}{x^4} = 0 \implies -2x^2+6 = 0 \implies x = \pm\sqrt{3}$

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗	Creciente ↗	Decreciente ↘

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$ y *decreciente* en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $\left(-\sqrt{3},-\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$ y un *máximo relativo* en $\left(\sqrt{3},\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ *y* $g(x) = x + 3$.

a) (1.25 puntos) Calcula la primitiva de $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ *que pase por el punto* $(5, 0)$.

b) (1.25 puntos) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x)$ *y* $g(x)$

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2025 - Extraordinario - Opción B)

Solución.

a) $$H(x) = \int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{x+3}{x^2-4x+3}\,dx \overset{*}{=} \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx$$
$$= -2 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x-3| + C$$
$$H(5) = 0 \implies -2 \cdot \ln 4 + 3 \cdot \ln 2 + C = 0 \implies C = \ln 16 - \ln 8 = \ln 2$$
$$\boxed{H(x) = -2 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x-3| + \ln 2}$$

$$* \quad x^2 - 4x + 3 = (x-1) \cdot (x-3)$$
$$\frac{x+3}{\cancel{x^2-4x+3}} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A \cdot (x-3) + B \cdot (x-1)}{\cancel{x^2-4x+3}}$$
$$\implies \begin{cases} \langle\, x = 1 \,\rangle & 4 = -2A & \Rightarrow A = -2 \\ \langle\, x = 3 \,\rangle & 6 = 2B & \Rightarrow B = 3 \end{cases}$$

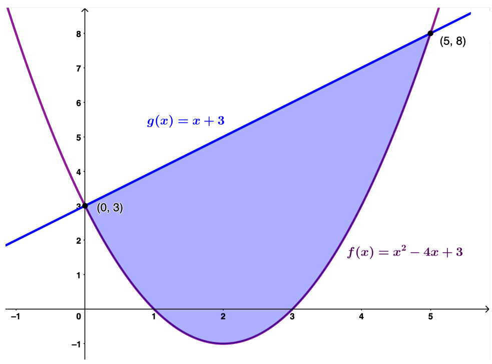
b) Hallamos el corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \implies x^2 - 4x + 3 = x + 3 \implies x^2 - 5x = 0 \implies x = \{0, 5\}$$

Lo que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 5)$

$$A_1 = \int_0^5 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^5 \left(x^2 - 5x\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{125}{3} - \frac{125}{2} = -\frac{125}{6}$$

$$\text{Area} = |A_1| = \frac{125}{6} \simeq 20.83\ u^2$$



Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Dados los puntos $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$, $C(3,4,3)$.

a) *(0.75 puntos) ¿Están* A, B *y* C *alineados?*

b) *(1 punto) Halla un vector que sea ortogonal a* $\overline{AB}$ *y* $\overline{AC}$*, y de módulo* $\sqrt{2}$.

c) *(0.75 puntos) Halla el punto simétrico del punto* A *respecto del punto* B

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2025 - Extraordinario - Opción A)

Solución.

a) $\overrightarrow{AB} = (2,3,4) - (1,2,3) = (1,1,1) \qquad \& \qquad \overrightarrow{AC} = (3,4,3) - (1,2,3) = (2,2,0)$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0} \implies \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \implies A,\ B,\ C$ no están alineados.

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \end{array}\right\} \implies \vec{u} = k \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = k \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = k \cdot (-2,2,0) \approx (k,-k,0)$

$|\vec{u}| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{k^2+k^2} = |k| \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow |k| = 1 \Rightarrow k = \pm 1 \implies \begin{cases} \vec{u}_1 = (-1,1,0) \\ \vec{u}_2 = (1,-1,0) \end{cases}$

c) El punto B será el punto medio entre el punto A y su simétrico A'

$B = \frac{A + A'}{2} \implies A' = 2B - A = 2 \cdot (2,3,4) - (1,2,3) \implies \boxed{A'(3,4,5)}$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Dada la recta $s \equiv \dfrac{x}{-4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{0}$, *el plano* $\pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0$ *y el punto* $P(1,-1,0)$.

a) *(0.75 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta* s *que pase por* P.

b) *(1 punto) Calcular la distancia del pnto* P *a la recta* s.

c) *(0.75 puntos) Calcular el ángulo que forma la recta* s *con el plano* π.

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2025 - Extraordinario - Opción B)

Solución.

$$s \equiv \begin{cases} S(0,1,-1) \\ \vec{d}_s = (-4,3,0) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = -1 \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R} \quad \& \quad \overrightarrow{PS} = (-1,2,-1)$$

a) $$\pi' \equiv \begin{cases} P(1,-1,0) \\ \vec{n}_{\pi'} = \vec{d}_s = (-4,3,0) \end{cases} \implies \pi' \equiv -4x+3y+D=0 \xrightarrow{P\in\pi'} -4-3+D=0$$

$$\implies D = 7 \implies \boxed{\pi' \equiv -4x+3y+7=0}$$

b) $$d(P,s) = \frac{\left|\overrightarrow{PS} \times \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_s\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|(3,4,5)|}{5} = \frac{\sqrt{9+16+25}}{5} = \sqrt{2}\ u$$

c) $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\vec{d}_s \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d}_s\right| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{|(-4,3,0)\cdot(1,-2,3)|}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{1+4+9}} = \frac{|-10|}{5\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \implies \boxed{\alpha = 32.31^\circ}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se sabe que el 30 % de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión "La Revuelta". La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:

a) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.

b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.

c) (1 punto) Se sabe que, en la misma población, el 35 % ve el programa 'Èl Hormiguero" y se sabe también que el 40 % no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

(Extremadura - Matemáticas II - Julio 2025 - Extraordinario - Opción Unica)

Solución.

$$X \equiv \text{"N º de personas que ven la Revuelta de entre 10"} \longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.3)$$

a) $P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \cdot 0.3^9 \cdot 0.7^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.3^{10} \cdot 0.7^0 = 0.00014$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^{10} = 0.9718$

c) Sean los sucesos:

$R \equiv$ "El espectardor ve La Revuelta" $\quad H \equiv$ "El espectador ve El Hormiguero"

Del enunciado tenemos:

$$P(R) = 0.3 \qquad \& \qquad P(H) = 0.35 \qquad \& \qquad P(\overline{R} \cap \overline{H}) = 0.4$$

$$P(\overline{R} \cap \overline{H}) = P(\overline{R \cup H}) = 1 - P(R \cup H) = 0.4 \implies P(R \cup H) = 0.6$$

$$P(R \cap H) = P(R) + P(H) - P(R \cup H) = 0.3 + 0,35 - 0.6 \implies \boxed{P(R \cap H) = 0.05}$$