MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

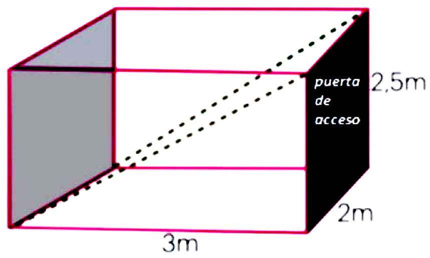
EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2.5 metros.



En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión 3×2.5 metros, tal y como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).

a) *(1 punto) Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.*

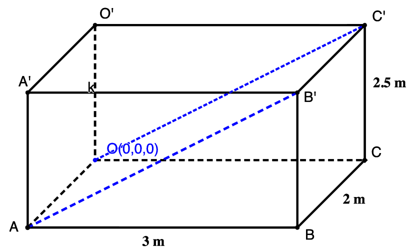
b) *(1 punto) Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifica el proceso.*

c) *(0.5 puntos) Una de las dos caras de dimensión 2×2.5 metros constituye la puerta del contenedor tal y como se muestra en la figura. ¿Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones 2.75×2.75 metros?*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción Unica)

Solución.

a) Según el esquema de la figura las coordenadas de los vértices del contenedor son:



$$O(0,0,0) \quad A(2,0,0) \quad B(2,3,0) \quad C(0,3,0)$$
$$O'(0,0,2.5) \quad A'(2,0,2.5) \quad B'(2,3,2.5) \quad C'(0,3,2.5)$$

b) $\left|\overrightarrow{OC'}\right| = \left|\overrightarrow{AB'}\right| = |(0,3,5/2)| = \sqrt{9+25/4} = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \simeq 3.91\ m$

$$\pi \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \overrightarrow{OA} = (2,0,0) \\ \overrightarrow{OC'} = (0,3,5/2) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5/2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv 5y - 6z = 0}$$

c) Lógicamente la lámina no cabe por la puerta ni horizontal ni verticalmente. Veamos cuánto mide la diagonal de la puerta para ver si nos cabe en esa orientación:

$$d = \sqrt{2^2 + 2.5^2} = \sqrt{10.25} \simeq 3.2 > 2.75 \Longrightarrow \text{la lámina entra por la diagonal}$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Dado el sistema

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

donde k es un número real cualquiera.

a) (1.5 puntos) Discute, según el parámetro k, el número de soluciones que tiene el sistema.

b) (1 punto) Resuelve el sistema cuando sea posible.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -k^2 + k + 3 = 0 \implies k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

- Si $k \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2} \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $k = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $k \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ por el método de Cramer, teniendo en cuenta que es un S.C.D.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k+1}{-k^2+k+3} \qquad \& \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{-k^2+k+3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3k}{-k^2+k+3}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3.50 *€, cada hamburguesa cuesta* 4 *€ y cada refresco cuesta* 1.50 *€. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.*

a) (1 punto) ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 *€ y has vendido* 132 *artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos?*

b) (1.5 puntos) Si, además, sabemos que se han vendido 20 *hamburguesas. ¿Cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de perritos calientes vendidos”}$$
$$y \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de hamburguesas vendidas”}$$
$$z \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de refrescos vendidos”}$$

a) Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=132 \\ 3.5x+4y+1.5z=328 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=132 \\ 7x+8y+3z=656 \end{cases} \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 132 \\ 7 & 8 & 3 & 656 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \implies$ el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO y por tanto no tiene una única solución.
Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 132 \\ 7 & 8 & 3 & 656 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 7F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 132 \\ 0 & 1 & -4 & -268 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow x+4\lambda-268+\lambda=132 & \Rightarrow & x = 400-5\lambda \\ \Rightarrow y-4\lambda=-268 & \Rightarrow & y=-268+4\lambda \\ \Rightarrow z=\lambda & \Rightarrow & z=\lambda \end{array}$$

Podemos afinar esta solución teniendo en cuenta que $x,\ y,\ z$ son números enteros positivos y por tanto:

$$\begin{cases} 400-5\lambda \geq 0 \implies \lambda \leq 80 \\ -268+4\lambda \geq 0 \implies \lambda \geq 67 \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \implies \boxed{\begin{array}{c} x = 400-5\lambda \\ y=-268+4\lambda \ ,\forall\ \lambda \in \mathbb{Z}^+ \mid 67 \leq \lambda \leq 80 \\ z=\lambda \end{array}}$$

b) Si hemos vendido 20 hamburguesas tenemos que:

$$y=-268+4\lambda=20 \implies \lambda=72 \implies x=400-5\cdot 72=40$$

Luego habrá vendido 40 perritos calientes, 20 hamburguesas y 72 refrescos.

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

> *Dada la curva* $y(x) = x^2 - 4$
>
> *a) (1 punto) Calcula la recta tangente,* r*, a la curva* y *en el punto* $(2, 0)$.
>
> *b) (1.5 puntos) Calcula el área de la región comprendida entre la curva* y*, el eje* OY *y la recta* r.
>
> *(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A)*

Solución.

a) $(x_0, y_0) = (2, 0)$

$y'(x) = 2x$

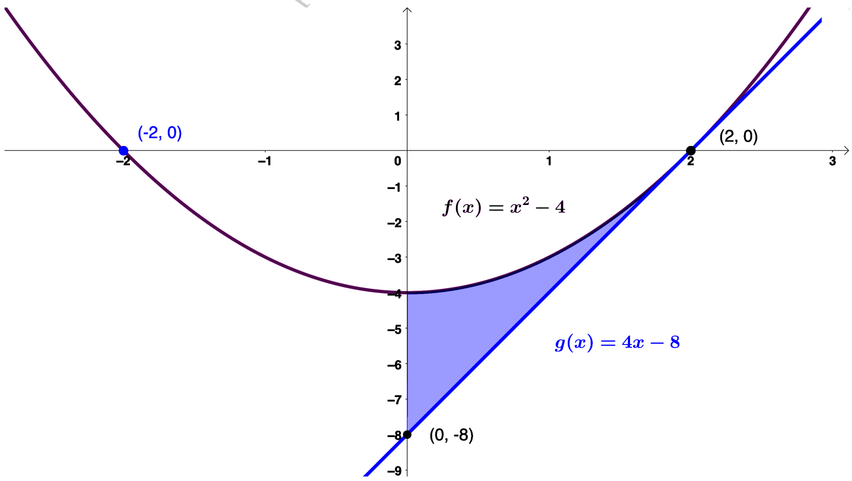
$m_r = y'(x_0) = y'(2) = 4$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 0 = 4 \cdot (x - 2) \implies \boxed{r \equiv y = 4x - 8}$

b) El punto de corte de ambas funciones es el punto de tangencia $(2, 0)$. Como el eje OY, es la recta $x = 0$, tenemos un único recinto de integración $A_1 : (0, 2)$ y dado que la parábola convexa $y = x^2 - 4$ está por encima de su tangente, el área pedida será:

$$\text{Area} = \int_0^2 [y(x) - r(x)]\, dx = \int_0^2 \Big[(x^2 - 4) - (4x - 8)\Big]\, dx = \int_0^2 \Big(x^2 - 4x + 4\Big)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \Bigg]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - 0 = \frac{8}{3} \simeq 2.67\ u^2$$



Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo ($t \geq 0$), por la función

$$H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}}$$

donde el tiempo está medido en segundos.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la concentración inicial?

b) (1 punto) Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

c) (1 punto) Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $H(0) = \dfrac{20}{1+e^0} = 10\,\%$

b) $H'(t) = \dfrac{20 \cdot e^{-t}}{\left(1+e^{-t}\right)^2} > 0 \ \forall\, t \geq 0$, luego $H(t)$ es siempre creciente

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} H(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{20}{1+e^{-t}} = 20\,\%$ es la concentración a la que tiende con el tiempo

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45 % de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos averiados el 40 % han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que de los productos no averiados, se sabe que el 55 % también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

a) (0.75 puntos) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?

b) (0.75 puntos) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?

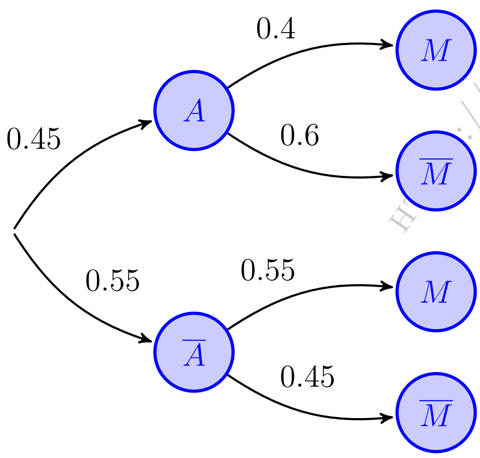
c) (1 punto) Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El dron se averia antes de los 5 años”}$$
$$M \equiv \text{“El usuario ha hecho un mal uso del producto”}$$



a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.45 = 0.55$

b) $P(\overline{M} \mid \overline{A}) = 1 - P(M \mid \overline{A}) = 1 - 0.55 = 0.45$

c)
$$\begin{aligned} P(M) &= P\big((A \cap M) \cup (\overline{A} \cap M)\big) \\ &= P(A \cap M) + P(\overline{A} \cap M) \\ &= P(A) \cdot P(M \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(M \mid \overline{A}) \\ &= 0.45 \cdot 0.4 + 0.55 \cdot 0.55 = 0.4825 \end{aligned}$$

$$P(\overline{A} \mid M) = \frac{P(\overline{A} \cap M)}{P(M)} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(M \mid \overline{A})}{P(M)} = \frac{0.55 \cdot 0.55}{0.4825} = 0.6269$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los sucesos complementarios de A y B, respectivamente, y sea $A \cap \overline{B}$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B.
Dadas las probabilidades

$$P(A) = 0.75 \qquad \& \qquad P(\overline{B}) = 0.45 \qquad \& \qquad P(A \cap \overline{B}) = 0.3$$

calcula:

a) (0.75 puntos) $P(A \cap B)$.

b) (0.75 puntos) $P(B \cap \overline{A})$.

c) (1 punto) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Nota: *Hemos utilizado la notación $\overline{A}$ en lugar de A' y $A \cap \overline{B}$ en lugar de $A - B$ por homogeneizarla con el resto de Comunidades.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.45 = 0.55$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.75 - P(A \cap B) = 0.3 \implies \boxed{P(A \cap B) = 0.45}$$

b) $$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.55 - 0.45 \implies \boxed{P(B \cap \overline{A}) = 0.1}$$

c) $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \Big[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\Big]$$
$$= 1 - (0.75 + 0.55 - 0.45) \implies \boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.15}$$