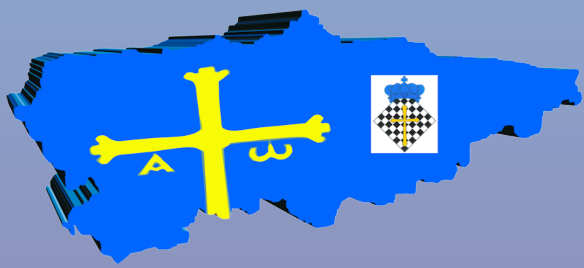
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) *(0.75 puntos) Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = \mathcal{O}$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.*

b) *(0.75 puntos) Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.*

c) *(1 punto) Resuelva el sistema homogéneo del apartado (a), para el valor de $a = 0$.*

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque A)

Solución.

a) $|A| = -2a = 0 \implies a = 0$

- Si $a \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución trivial $x = y = z = 0$)
- Si $a = 0 \implies |A| = 0 \implies \text{ran}(A) = \text{ran}(A^*) < 3 \implies$ Sistema Compatible Indeterminado (∞ Soluciones)
- Como es un sistema homogéneo siempre tiene solución (es compatible), luego no hay ningún valor de a para el cual el sistema no tenga solución.

b) Llamaremos A^* a la matriz ampliada y A a la matriz de coeficientes.
$|A^*| = -2a = 0 \implies a = 0$

- Si $a \neq 0 \implies |A^*| \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3 \neq \text{ran}(A) \implies$ Sistema Incompatible (No hay solución)
- Si $a = 0 \implies |A^*| = 0 \implies \text{ran}(A^*) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies$ $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado (solución única)

c) Resolvemos el sistema para $a = 0$. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. solo es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 no nulo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 3F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + 2\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \ \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Una matriz M verifica que $|M| = x$. (Los apartados siguientes son independientes). Se pide:

a) (1 punto) Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x-1)\cdot I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

b) (0.75 puntos) Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudie si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) (0.75 puntos) Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3, que $x \neq 0$ y que $M = x \cdot M^2$. Calcule los posibles valores de x y $|M^{-1}|$ para cada uno de ellos.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque B)

Solución.

a) $M^2 = (x-1)\cdot I \implies |M^2| = |(x-1)\cdot I| \implies |M|^2 = (x-1)^2 \cdot |I|$

$\implies x^2 = (x-1)^2 \implies x^2 = x^2 - 2x + 1 \implies 2x - 1 = 0 \implies \boxed{x = 1/2}$

b) $|M| = x - 1 \neq x \implies \nexists x \in \mathbb{R} \mid M$ es la matriz propuesta.

c) $M = x \cdot M^2 \implies |M| = |x \cdot M^2| \implies x = x^3 \cdot |M^2| = x^3 \cdot |M|^2 = x^3 \cdot x^2 = x^5$

$$\Rightarrow x = x^5 \Rightarrow x\cdot(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x = 0} \quad (\text{pues } x \neq 0) \\ x^4 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -1} \Rightarrow |M^{-1}| = \dfrac{1}{|M|} = \dfrac{1}{-1} = -1 \\ \boxed{x = 1} \Rightarrow |M^{-1}| = \dfrac{1}{|M|} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2 \cdot \cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0, 4]$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular los máximos y mínimos de la función.

b) (0.75 puntos) Demostrar que el depósito no se vacía nunca.

c) (0.75 puntos) Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque A)

Solución.

a) $f'(t) = -2 \cdot \text{sen}\,(t + \pi/2) = 0 \implies t + \dfrac{\pi}{2} = k\pi \implies \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{2} \notin [0, 4] \\ t + \dfrac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \in [0, 4] \\ t + \dfrac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow t = \dfrac{3\pi}{2} \notin [0, 4] \end{cases}$

	$(0, \pi/2)$	$(\pi/2, 4)$
Signo $f'(t)$	$-$	$+$
$f(t)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

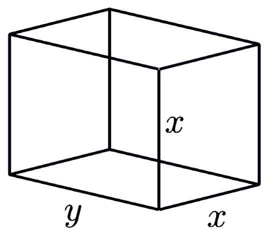
La función $f(t)$ es *creciente* en $(\pi/2, 4)$ y *decreciente* en $(0, \pi/2)$, y tiene un *mínimo relativo*, que es también *absoluto* en $(\pi/2, 8)$. Como $f(0) = 10$ y $f(4) = 11.51$, hay un *máximo absoluto* en $(4, 11.51)$.

b) Como el mínimo absoluto es $(\pi/2, 8)$, en ningún momento se vaciará el depósito.

c) Hemos visto que la cantidad de agua almacenada en el depósito $f(t)$ es creciente desde $t = \pi/2$ hasta $t = 4$, por lo que el depósito aumentará el agua almacenada durante $4 - \pi/2 = \dfrac{8 - \pi}{2} \simeq 2.43$ horas.

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y, como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcule los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque B)

Solución.

$$\left.\begin{array}{l} V(x,y) = x^2y \\ S = 2x^2 + 3xy = 3 \Rightarrow y = \dfrac{3-2x^2}{3x} \end{array}\right\} \Longrightarrow V(x) = x^{\cancel{2}} \cdot \frac{3-2x^2}{3\cancel{x}} = \frac{3x-2x^3}{3}$$

$$V'(x) = \frac{3-6x^2}{3} = 0 \Longrightarrow 3 - 6x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{x = -\sqrt{2}/2} \\ x = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$V''(x) = -4x \Longrightarrow V''(\sqrt{2}/2) = -2\sqrt{2} < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo en } x = \sqrt{2}/2$$

Por lo tanto la capacidad máxima es de $V(\sqrt{2}/2) = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0.4714\ m^3$, con unas dimensiones de $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ m$ e $y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ m$.

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$*. Se pide:*

a) (1.25 puntos) Una primitiva de la función f *que en* 0 *valga* 1*.*

b) (1.25 puntos) Calcular el área encerrada entre la gráfica de f*, el eje* X *y las rectas* $x=-1$ *y* $x=1$*.*

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque A)

Solución.

a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{u'/u}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln\left|x^2+1\right| + K$

$$F(0)=1 \implies K=1 \implies \boxed{F(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|x^2+1\right|+1}$$

b) Hallamos los cortes de $f(x)$ con el eje OX $\implies f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \implies x=0.$

Por lo tanto entre las rectas $x=-1$ y $x=1$ se definen dos recintos de integración $A_1 : (-1,0)$ y $A_2 : (0,1)$.

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0)-F(-1) = 1-\left(\frac{1}{2}\cdot\ln 2+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\ln 2$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = F(1)-F(0) = \left(\frac{1}{2}\cdot\ln 2+1\right)-1 = \frac{1}{2}\cdot\ln 2$$

$$\text{Área} = |A_1|+|A_2| = \frac{1}{2}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\cdot\ln 2 = \ln 2 \simeq 1.4142\ u^2$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ *es una primitiva de una función* g, *donde* a, $b \in \mathbb{R}$ *son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:*

a) (1 punto) Determinar la función $g(x)$ *en función de los parámetros* a *y* b.

b) (0.5 puntos) ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g *en función de una constante* K*?*

c) (1 punto) Sabiendo que $g(1) = 2$ *y* $g(0) = 1$, *determinar la función* g.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque B)

Solución.

a) $g(x) = G'(x) = x^2 + 2ax + b$

b) $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + K$

c) $$\left.\begin{array}{l} g(0) = 1 \implies b = 1 \\ g(1) = 2 \implies 1 + 2a + 1 = 2 \implies a = 0 \end{array}\right\} \implies g(x) = x^2 + 1$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Se consideran los puntos $A(1,1,1)$ y $B(-1,1,3)$. Se pide que:

a) (1 punto) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.

b) (1 punto) Calcule las distancias de A y B al plano π.

c) (0.5 puntos) Tome un punto cualquiera del plano π, distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque A)

Solución.

a) $$\pi \begin{cases} M_{AB} = \dfrac{A+B}{2} = (0,1,2) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} = (-2,0,2) \approx (1,0,-1) \end{cases} \implies \pi \equiv x - z + D = 0 \xrightarrow{M\in\pi} -2 + D = 0$$

$$\implies D = 2 \implies \boxed{\pi \equiv x - z + 2 = 0}$$

b) $$\left.\begin{cases} \pi \perp \overrightarrow{AB} \\ M_{AB} \in \pi \end{cases}\right\} \implies d(A,\pi) = d(B,\pi) = d(M,A) = \left|\overrightarrow{MA}\right| = |(-1,0,1)| = \sqrt{2}\ u$$

c) $$P(0,0,2) \in \pi \implies \begin{cases} d(P,A) = \left|\overrightarrow{PA}\right| = |(1,1,-1)| = \sqrt{3} \\ d(P,B) = \left|\overrightarrow{PB}\right| = |(-1,1,1)| = \sqrt{3} \end{cases}$$

La distancia es la misma porque π es el plano mediador de A y B, es decir, el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a los puntos A y B es la misma.

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ *y el plano* $\pi \equiv 2x+y+\beta z=3$. *Se pide:*

a) *(0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista el valor de* $\beta \in \mathbb{R}$ *que hace que* r *y* π *sean paralelos.*

b) *(0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de* β *para que el plano y la recta sean perpendiculares.*

c) *(1 punto) Para* $\beta = 0$, *calcular el simétrico del punto* $(-1,0,1)$ *respecto del plano* π.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,1,1) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,1,-3) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-3\lambda \end{cases}$$

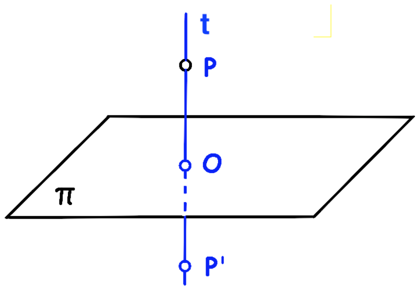
a) $r \parallel \pi \iff \begin{cases} \vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0 \implies (2,1,-3)\cdot(2,1,\beta) = 4+1-3\beta = 0 \implies \boxed{\beta = 5/3} \\ R \notin \pi \implies 0+1+\beta \neq 3 \implies \beta \neq 2 \checkmark \end{cases}$

b) $r \perp \pi \iff \vec{d_r} \parallel \vec{n_\pi} \implies \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{-3}{\beta} \implies \boxed{\beta = -3}$

c) $t \equiv \begin{cases} P(-1,0,1) \\ \vec{d_t} = \vec{n_\pi} \overset{\beta=0}{=} (2,1,0) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}$

$O = t \cap \pi \implies 2\cdot(-1+2\lambda)+\lambda = 3 \implies \lambda = 1 \implies O(1,1,1)$

$O = \dfrac{P+P'}{2} \implies P' = 2O - P = 2\cdot(1,1,1) - (-1,0,1) \implies \boxed{P'(3,2,1)}$



Ejercicio 5A (2.5 *puntos*)

Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

a) (1.25 puntos) Sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de un euro?

b) (1.25 puntos) Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque A)

Solución.

a) $P(\text{"Al menos una de 1 €"}) = 1 - P(\text{"Ninguna de 1 €"}) = 1 - \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{11}{12} \simeq 0.9167$

b) Sea el suceso $C_i \equiv$ "La moneda i es de 1 céntimo"

$$P(C_2) = P\Big((C_1 \cap C_2) \cup (\overline{C}_1 \cap C_2)\Big) = P(C_1 \cap C_2) + P(\overline{C}_1 \cap C_2)$$

$$= P(C_1) \cdot P(C_2 \mid C_1) + P(\overline{C}_1) \cdot P(C_2 \mid \overline{C}_1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Ejercicio 5B (2.5 *puntos*)

La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 *años y desviación típica* 30.

a) *(0.75 puntos) ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de* 100 *años?*

b) *(0.75 puntos) Si se toma una muestra de* 4 *elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los* 100 *años de vida?*

c) *(1 punto) Calcula un valor* $a \in \mathbb{R}$ *que haga que el* 98 % *de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que* $82 + a$.

Nota: *Algunos valores de la función de distribución* $\mathcal{N}(0,1)$ *son* $F(x) = P(Z \leq x)$, $P(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(2.06) = 0.98$, $F(0.98) = 0.8265$.
Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

(Asturias - Matemáticas II - Julio 2025 - Bloque B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Esperanza de vida de los elefantes (años)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(82, 30)$$

a) $$P(X \geq 100) = P\left(Z \geq \frac{100-82}{30}\right) = P(Z \geq 0.6) = 1 - P(Z \leq 0.6) = 1 - 0.7257$$
$$= 0.2743 \implies 27.43\,\%$$

b) $$X \equiv \text{“N}^{\text{o}}\text{ de elefantes de un total de 4 que superan los 100 años”} \longrightarrow X : \mathcal{B}(4, 0.2743)$$
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0.2743^0 \cdot 0.7257^4 = 0.7226$$

c) $$P(X \leq 82 + a) = P\left(Z \leq \frac{82 + a - 82}{30}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{30}\right) = 0.98 \xrightarrow{\text{Tabla}} \frac{a}{30} = 2.06$$
$$\implies \boxed{a = 61.8}$$