MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se quiere construir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,0,{}^1\!/_2)$ y $C({}^3\!/_2,3,1)$ y el vértice superior, D, se encuentra en una viga recta entre los puntos $E(0,1,3)$ y $F(3,2,3)$ (es decir,que el punto $D = E + \lambda\overrightarrow{EF}$, con $\lambda \in [0,1]$).

a) (1.5 puntos) Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).

b) (1 punto) Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción Única)

Solución.

a) $D = E + \lambda\overrightarrow{EF} = (0,1,3) + \lambda\cdot(3,1,0) = (3\lambda, 1+\lambda, 3)$

$$V_T(\lambda) = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & {}^1\!/_2 \\ {}^3\!/_2 & 3 & 1 \\ 3\lambda & 1+\lambda & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|-\frac{9\lambda}{2} - \frac{5}{4}\cdot(1+\lambda) + 18\right|$$

$$= \left|\frac{67-23\lambda}{24}\right| \quad \& \quad V_{\text{máx}} \iff \lambda = 0 \implies V_T(0) = \frac{67}{24} \simeq 2.7917\ m^3$$

b) $$\text{Si } \lambda = 1 \implies V_T(1) = \left|\frac{67-23}{24}\right| = \frac{44}{24} = \frac{11}{6}$$

$$V_T(1) = \frac{1}{3}\cdot S_{\underset{ABC}{\triangle}}\cdot H \implies H = \frac{3\cdot V_T(1)}{S_{\underset{ABC}{\triangle}}} \overset{\odot}{=} \frac{3\cdot\frac{11}{6}}{\frac{7\sqrt{13}}{8}} = \frac{44\sqrt{13}}{91} \implies \boxed{H \simeq 1.7433\ m}$$

$$\odot\ S_{\underset{ABC}{\triangle}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & {}^1\!/_2 \\ {}^3\!/_2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\left(-\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{4},6\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{25}{16}+36} = \frac{1}{8}\cdot\sqrt{637} = \frac{7\sqrt{13}}{8}\ m$$

Ejercicio 2A (2 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 8x + my - 6z = -8 \\ -x - 2y + m^2 z = m \end{cases}$$

con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

a) (1.5 puntos) Estudia, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.

b) (1 punto) Resuelve, si es posible, el sistema para $m = 1$.

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & m & -6 & -8 \\ -1 & -2 & m^2 & m \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m^3 - 16m^2 - m + 16 = 0 \xRightarrow{\odot} m = \{-1, 1, 16\}$$

$$\odot \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -16 & -1 & 16 \\ 1 & & 1 & -15 & -16 \\ \hline & 1 & -15 & -16 & 0 \end{array} \quad m^2 - 15m - 16 = 0 \implies m = \{-1, 16\}$$

- Si $m \neq \{-1, 1, 16\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & -1 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & -8 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 34 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & -8 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $m = 16 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 16 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 256 & 16 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 16 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 16 & -6 & -8 \\ -2 & 256 & 16 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $m = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 8F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -15 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{2}{15}\lambda - \lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -15y + 2\lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = -1 + \frac{11}{15}\lambda & \\ y = \frac{2}{15}\lambda & , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}}$$

Ejercicio 2B (2 *puntos*)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) *(1.5 puntos) Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que*

$$\begin{cases} A\cdot B = -B \\ A\cdot C = B - C \end{cases}$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C.

b) *(1 punto) Sea D una matriz columna no nula tal que $A\cdot D = D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1}\cdot D = D$.*

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $\begin{cases} A\cdot B = -B \\ A\cdot C = B - C \end{cases} \implies \begin{cases} A\cdot B + B = \mathcal{O} \\ A\cdot C + C = B \end{cases} \implies \begin{cases} (A+I)\cdot B = \mathcal{O} \\ (A+I)\cdot C = B \end{cases}$

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow (A+I)\cdot B = \mathcal{O} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2b \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 2a + b = 0 \xrightarrow{b=0} a = 0 \\ 2b = 0 \implies b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \implies B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Rightarrow (A+I)\cdot C = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta \\ 2\beta \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \xrightarrow{\beta=0} \alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \implies \beta = 0 \\ \delta = c \end{cases} \implies C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ c \end{pmatrix}$$

b) $|A| = 1 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}$

$A\cdot D = D \implies \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot D = A^{-1}\cdot D \implies D = A^{-1}\cdot D$ q.e.d.

Ejercicio 3A (2 *puntos*)

> a) *(0.5 puntos) Dada la función* $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ *con* $x \in \mathbb{R}$*, calcula* $f'(x)$*.*
>
> b) *(1 punto) Obtén* $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}\, dx$*.*
>
> c) *(1 punto) Calcula (si existe), en función del valor de* $k \in \mathbb{Z}$*, el valor del límite*
>
> $$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2-1)^{2k}}$$
>
> *(Aragón - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A)*

Solución.

a) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x)$

b) $\displaystyle\int \underbrace{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}}_{u'/u}\, dx = \ln|2 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x| + C$

c)

- Si $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2-1)^{2k}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\odot}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)^2}{(x+1)^{2k}\cdot(x-1)^{2x}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x}{(x+1)^{2k-2}\cdot(x-1)^{2k-1}} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \implies \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

- Si $k \in \mathbb{Z}^-$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2-1)^{2k}} = \lim_{x\to 1} (x^4 + x^3 - x^2 - x)\cdot(x^2-1)^{-2k} = 0$$

- Si $k = 0$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2-1)^{0}} = \lim_{x\to 1} (x^4 + x^3 - x^2 - x) = 0$$

$$\odot \quad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad x^3 + 2x^2 + x = x\cdot(x^2+2x+1) = x\cdot(x+1)^2$$

Ejercicio 3B (2 *puntos*)

Sea $g(x) = x - \operatorname{sen} x$*, con* $x \in \mathbb{R}$*.*

a) (0.5 puntos) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $g(x)$*.*

b) (0.5 puntos) Obtén los máximos y mínimos absolutos de $g(x)$ *en el intervalo* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$*.*

c) (1.5 puntos) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x) = x \cdot g(x)$*, el eje* X *y las rectas* $x = \pi/2$ *y* $x = \pi$*.*

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $g'(x) = 1 - \cos x = 0 \implies \cos x = 1 \implies x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Como la función $\cos x$ está acotada entre $[-1, 1]$, la derivada $g'(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, luego $g(x)$ es *creciente* en $\mathbb{R}$.

b) Como la función es creciente en $\mathbb{R}$, el *mínimo absoluto* será $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-2}{2}\right)$, mientras que el *máximo absoluto* será $(\pi, f(\pi)) = (\pi, \pi)$.

c) $h(x) = x \cdot g(x) = x^2 - x \cdot \operatorname{sen} x$, los puntos de corte con el eje X, entre las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$ serán:

$$h(x) = x^2 - x \cdot \operatorname{sen} x = x \cdot (x - \operatorname{sen} x) = 0 \implies x = 0$$

Nótese que $g(x) = x - \operatorname{sen} x$ es creciente en $\mathbb{R}$, y como $g(\pi/2) = \dfrac{\pi - 2}{2} > 0$, la función no se anulará en el intervalo $(\pi/2, \pi)$. Por lo tanto, entre las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$ se define un único recinto de integración $A_1 : (\pi/2, \pi)$.

$$H(x) = \int h(x)\, dx = \int (x^2 - x \cdot \operatorname{sen} x)\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$= \frac{x^3}{3} + x \cdot \cos x - \int \cos x\, dx = \frac{x^3}{3} + x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x + C$$

$$A_1 = \int_{\pi/2}^{\pi} h(x)\, dx = H(\pi) - H(\pi/2) = \left(\frac{\pi^3}{3} - \pi - 0\right) - \left(\frac{\pi^3}{24} + 0 - 1\right) = \frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1$$

$$\text{Área} = |A_1| = \left|\frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1\right| = \frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1 \simeq 6.902\ u^2$$

Ejercicio 4A (2 *puntos*)

Dentro de un estudio sobre la brecha que existe en el acceso de las mujeres a las carreras del ámbito de las STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) se está analizando el caso de Teruel.
La Universidad de Zaragoza cuenta con 3 centros en Teruel: la Facultad de Ciencias Sociales, la Escuela Universitaria Politécnica y la Escuela Universitaria de Enfermería. En el curso 2024-2025 se matricularon en esos centros 1550, 250 y 150 estudiantes, respectivamente. Además, en la Facultad de Ciencias Sociales el 74 % de los estudiantes son mujeres, en la Politécnica lo son solo el 18 % y en Enfermería el 76 %.
Colabora con el estudio y contesta las siguientes preguntas:

a) *(1 punto) Si se elige un estudiante universitario en Teruel, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?*

b) *(1 punto) Sabiendo que la escogida es mujer ¿cuál es la probabilidad de que dicha estudiante esté matriculada en la Escuela Politécnica?*

c) *(0.5 puntos) Si el estudiante escogido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la Escuela Politécnica?*

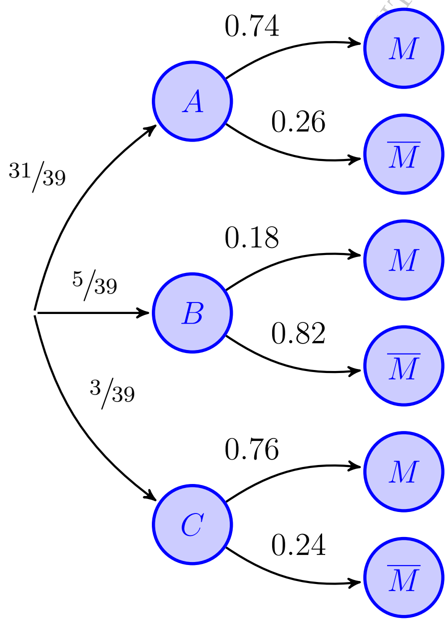
(Aragón - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos: $A \equiv$ "El estudiante es de la Facultad de Ciencias Sociales"
$B \equiv$ "El estudiante es de la Escuela Universitaria Politécnica"
$C \equiv$ "El estudiante es de la Escuela Universitaria de Enfermería"
$M \equiv$ "El estudiante es mujer"

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = \frac{1550}{1550+250+150} = \frac{31}{39} \quad \& \quad P(B) = \frac{250}{1950} = \frac{5}{39} \quad \& \quad P(C) = \frac{150}{1950} = \frac{3}{39}$$



a) $$\begin{aligned} P(M) &= P\Big((A\cap M)\cup(B\cap M)\cup(C\cap M)\Big) \\ &= P(A\cap M)+P(B\cap M)+P(C\cap M) \\ &= P(A)\cdot P(M\mid A)+P(B)\cdot P(M\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(M\mid C) = \frac{31}{39}\cdot 0.74 \\ &+ \frac{5}{39}\cdot 0.18 + \frac{3}{39}\cdot 0.76 = 0.6697 \end{aligned}$$

b) $$P(B\mid M) = \frac{P(B\cap M)}{P(M)} = \frac{P(B)\cdot P(M\mid B)}{P(M)}$$
$$= \frac{\frac{5}{39}\cdot 0.18}{0.6697} = 0.0345$$

c) $$P(B\mid \overline{M}) = \frac{P(B\cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(B)\cdot P(\overline{M}\mid B)}{1-P(M)}$$
$$= \frac{\frac{5}{39}\cdot 0.82}{1-0.6697} = 0.3183$$

Ejercicio 4B (2 *puntos*)

El beneficio mensual de dos empresas locales puede aproximarse por dos variables aleatorias con distribución normal. La media y la desviación típica, en euros, de ambas distribuciones es la siguiente:

Empresa	Media	Desviación típica
PI S.A.	11125	527
RHO M.A.	10950	430

Hay dos inversores que quieren invertir parte de sus ahorros en una de estas dos empresas.

a) *(1.25 puntos) El primer inversor, con perfil agresivo, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 euros sea mayor. ¿En qué empresa debe invertir?*

b) *(1.25 puntos) El segundo inversor, con un perfil más conservador, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener pérdidas a lo largo de un mes sea menor. ¿En qué empresa debe invertir?*

(Aragón - Matemáticas II - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Beneficio de la empresa PI S.A.(€)" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(11125, 527)$

$Y \equiv$ "Beneficio de la empresa RHO M.A.(€)" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(10950, 430)$

$$P(X \geq 10000) = P\Big(Z \geq \frac{10000 - 11125}{527}\Big) = P(Z \geq -2.135) = P(Z \leq 2.135)$$
$$= 0.9836$$

$$P(Y \geq 10000) = P\Big(Z \geq \frac{10000 - 10950}{430}\Big) = P(Z \geq -2.21) = P(Z \leq 2.21)$$
$$= 0.9864$$

Por lo tanto le interesaría invertir en la empresa RHO M.A.

b) $$P(X \leq 0) = P\Big(Z \leq \frac{0 - 11125}{527}\Big) = P(Z \leq -21.11)$$

$$P(Y \leq 0) = P\Big(Z \leq \frac{0 - 10950}{430}\Big) = P(Z \leq -25.47)$$

Ambas probabilidades son aproximadamente cero por lo que tenemos que razonar como sigue: $P(Z \leq -25.47) < P(Z \leq -21.11) \implies P(Y \leq 0) < P(X \leq 0)$, y por lo tanto al segundo inversor le interesa poner su dinero en la empresa RHO M.A.