MATEMATICAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JUNIO 2025

## - Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Junio 2025 (Ordinario)

**Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)**

I) *(1.5 puntos) Dadas las matrices $A$, $B$ y $C$:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) *(0.25 puntos) Calcula $C^2$.*

b) *(0.25 puntos) Halla $A+B+C^2$.*

c) *(0.25 puntos) Encuentra $(A-B)^{-1}$.*

d) *(0.75 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX - BX = A + B + C^2$.*

II) *(1 punto) Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:*

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción A)*



**Solución.**

I) a) $C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b) $A + B + C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $(A-B)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $AX - BX = A + B + C^2 \implies (A-B) \cdot X = A + B + C^2$

$\implies \underbrace{(A-B)^{-1} \cdot (A-B)}_{I} \cdot X = (A-B)^{-1} \cdot (A + B + C^2)$

$\implies X = (A-B)^{-1} \cdot (A+B+C^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

II) Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Determinado (Sol. única)}]{\text{Sistema Compatible}} \begin{array}{ll} \Rightarrow 3x + 2 - 2 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y + 7 \cdot 2 = 9 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 12 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}}$$

**Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)**

*Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:*

*a) (0.5 puntos) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones.*

*b) (0.75 puntos) Representa la región factible.*

*c) (0.5 puntos) Encuentra los vértices de esta región.*

*d) (0.5 puntos) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios?*

*e) (0.25 puntos) Calcula el beneficio máximo diario posible.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción B)*

**Solución.**

| | Notebook | Gaming | Restricción |
|---|---|---|---|
| Tiempo de selección (h) | 2 | 1 | $\leq 14$ |
| Tiempo de ensamblaje (h) | 1 | 4 | $\leq 16$ |
| Tiempo de control de calidad (h) | 1 | 2 | $\leq 10$ |



- `Incógnitas:`

$$x \equiv \text{“Nº de ordenadores notebook”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de ordenadores gaming”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

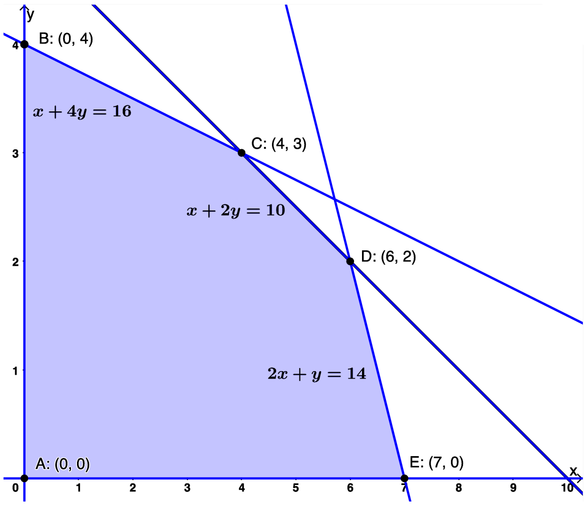
$$\begin{cases} (1)\ 2x + y \leq 14 & \rightarrow (0,14) \quad \& \quad (7,0) \\ (2)\ x + 4y \leq 16 & \rightarrow (0,4) \quad \& \quad (16,0) \\ (3)\ x + 2y \leq 10 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (10,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 400x + 500y \text{ (euros)}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 4 | 2000 |
| C | 4 | 3 | 3100 |
| D | 6 | 2 | 3400 |
| E | 7 | 0 | 2800 |




El *máximo beneficio diario* es de 3400 euros, produciendo 6 ordenadores notebook y 2 gaming.

**Ejercicio 2A (3 *puntos*)**

*Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^2+3}{1-x}$$

*a) (0.5 puntos) Determina su dominio.*

*b) (0.75 puntos) Estudia sus asíntotas.*

*c) (1 punto) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

*d) (0.75 puntos) Calcula los máximos y mínimos locales.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción A)*

**Solución.**

a) $1 - x = 0 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b)
- `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3}{1-x} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $y = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{1-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \mp\infty \implies \nexists A.H.$
- `A. Oblicua:` $\exists A.O.$ en $y = -x - 1$
  - $m = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{x-x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{-1} = -1$
  - $n = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+3}{1-x} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3 + x - \cancel{x^2}}{1-x}$

    $= \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+x}{1-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{-1} = -1$

c) $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(1-x) + (x^2+3)}{(1-x)^2} = \dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2} = 0 \implies x = \{-1, 3\}$

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,1)$ | $(1,3)$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | - | + | + | - |
| $f(x)$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ |

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-1,1)\cup(1,3)$ y *decreciente* en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

d) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(-1, 2)$ y un *máximo relativo* en $(3, -6)$.

## Ejercicio 2B (3 *puntos*)

*El famoso rapero Myke Towers ofrecerá un concierto en Murcia el próximo 6 de junio en el Espacio Norte, que durará 5 horas. La asistencia al evento, medida en miles de personas, viene dada por la siguiente función:*

$$N(t) = \frac{20t}{(t+1)^2}$$

*donde $0 \leq t \leq 5$ y $N$ es el número de miles de asistentes $t$ horas después del comienzo. Se pide:*

a) *(1 punto) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$.*

b) *(1.25 puntos) Calcula en qué hora se produce el máximo número de asistentes y a cuánto ascienden.*

c) *(0.25 puntos) Evalúa e interpreta la derivada de la función $N(t)$ en $t = 2$.*

d) *(0.5 puntos) Halla cuántos asistentes hay una vez han transcurrido 3 horas desde el comienzo del concierto.*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción B)*

**Solución.**

a) $N'(t) = \dfrac{20 \cdot (t+1)^{\cancel{2}} - 20t \cdot 2 \cdot \cancel{(t+1)}}{(t+1)^{\cancel{4}3}} = \dfrac{-20t+20}{(t+1)^3} = 0 \Rightarrow -20t + 20 = 0 \Rightarrow t = 1$

| | $(0,1)$ | $(1,5)$ |
|---|---|---|
| Signo $N'(t)$ | $+$ | - |
| $N(t)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ |

El número de asistentes $N(t)$ es *creciente* durante la primera hora $(0,1)$ y *decreciente* en las siguientes cuatro $(1,5)$.

b) El número *máximo de asistentes* se produce al cabo de una hora de comenzar el concierto y vale $N(1) = 5 \implies$ 5000 personas.

c) $N'(2) = \dfrac{-20 \cdot 2 + 20}{(2+1)^3} \simeq -0.74 < 0$, lo que implica que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $N(t)$ en $t = 2$ es negativa, lo que significa que el número de asistentes $N(t)$ en esa hora es decreciente.

d) $N(3) = \dfrac{20 \cdot 3}{(3+1)^2} \simeq 3.75 \implies$ 3750 asistentes transcurridas 3 horas.

**Ejercicio 3A (2 *puntos*)**

*Realiza:*

a) *(0.25 puntos) Si* $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$*, ¿a qué es igual* $\int_0^2 [f(x)+3]\,dx$*?*

b) *(1.75 puntos) Representa gráficamente el recinto del plano limitado por* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = 2x+3$*. Calcula su área.*

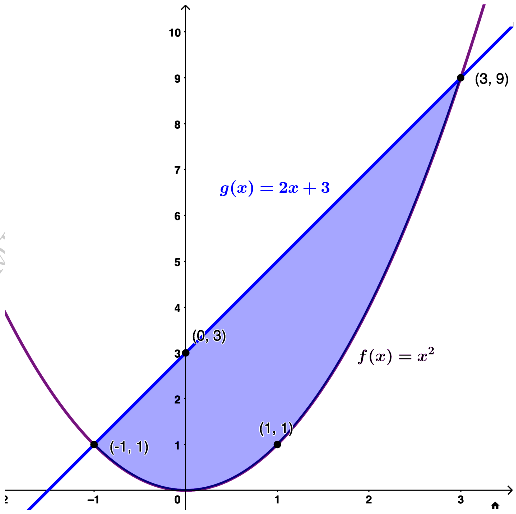
*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción A)*

**Solución.**

a) $\int_0^2 [f(x)+3]\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_0^2 3\,dx = 4 + [3x]_0^2 = 4 + 6 - 0 = 10$

b)
- $f(x) = x^2$ es una parábola *convexa* ($\cup$) con vértice en $(0,0)$.
- $g(x) = 2x+3$ es una recta creciente que pasa por $(0,3)$ y $(1,5)$.
- $f \cap g \Rightarrow x^2 = 2x+3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
  $\Longrightarrow\ x = \{-1, 3\}$

Lo que define un único recinto de integración $A : (-1,3)$. Haremos la integral de $g(x) - f(x)$, ya que la primera se sitúa por encima de la segunda.






$$\text{Área} = \int_{-1}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-1}^{3} \left(2x + 3 - x^2\right) dx = x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-1}^{3}$$

$$= (9 + 9 - 9) - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3} \simeq 10.67\ u^2$$

**Ejercicio 3B (2 *puntos*)**

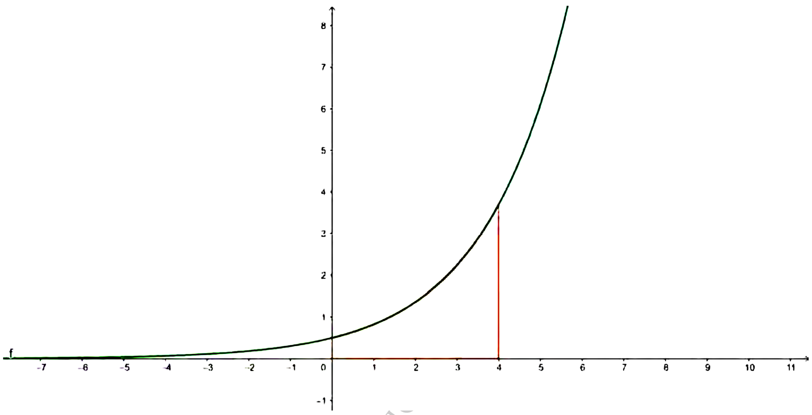
*Realiza:*

a) *(0.25 puntos) Calcula los valores de los límites de integración $a$ y $b$ de manera que se cumpla $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$.*

b) *Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$.*

b.1) *(0.5 puntos) Escribe la integral que describe el área de la región sombreada.*

b.2) *(1.25 puntos) Calcula el área.*




*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción B)*

**Solución.**

a) $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \implies \boxed{a = -2 \quad \& \quad b = 5}$

b) b.1) $\text{Área} = \int_{0}^{4} f(x)\,dx$

b.2) $\text{Área} = \int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{2}e^{x/2}\,dx = e^{x/2}\Big]_{0}^{4} = e^2 - e^0 = e^2 - 1 \simeq 6.389\ u^2$

**Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)**

*Un grupo de investigadores de la Universidad de Murcia realizó una encuesta en la que se preguntó a 1000 personas adultas su opinión sobre establecer una edad legal para que los niños tengan teléfono móvil. Según los resultados, 560 personas, de las que 390 eran mujeres, opinaron a favor de esta medida. De las 440 personas que opinaron en contra, 280 eran hombres. Si se selecciona una persona al azar:*

*a) (0.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida?*

*b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona encuestada sea mujer?*

*c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o esté a favor de esta medida?*

*d) (0.75 puntos) Si esa persona selecionada al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida?*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción A)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$T \equiv \text{“El encuestado es favorable a la medida”}$$
$$H \equiv \text{“El encuestado es un hombre”}$$
$$M \equiv \text{“La encuestada es una mujer”}$$

Hacemos una tabla de contingencia con los datos (en negro) y la completamos (en azul).

| | $T$ | $\overline{T}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| $H$ | 170 | 280 | 450 |
| $M$ | 390 | 160 | 550 |
| **Total** | 560 | 440 | 1000 |

a) $P(T) = \dfrac{560}{1000} = 0.56$

b) $P(M) = \dfrac{550}{1000} = 0.55$

c) $P(M \cup T) = P(M) + P(T) - P(M \cap T)$
$$= 0.55 + 0.56 - \frac{390}{1000} = 0.72$$

d) $P(T \mid H) = \dfrac{170}{450} = 0.3778$

**Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)**

*El peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia sigue una distribución normal con media $\mu$ y desviación típica igual a 12 kg.*

a) *(1 punto) Si en una muestra de 64 jugadores el peso medio ha sido de 70 kg, calcula un intervalo de confianza con un 95 % de confianza para la media de los pesos de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia.*

b) *(0.75 puntos) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de $\mu$ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98 %.*

c) *(0.75 puntos) Si $\mu = 71$ y se elige a un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 75 kg?*

*(Región de Murcia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción B)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Peso de los jugadores de fútbol (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 12)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 12) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 70 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{64}} = 2.94$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (67.06; 72.94)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 4 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.98$

$$1-\alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.01 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} < 4 \implies n > \left(2.325 \cdot \frac{12}{4}\right)^2 = 48.65 \implies \boxed{n = 49}$$

c) $X : \mathcal{N}(71, 12)$

$$P(X \geq 75) = P\left(Z \geq \frac{75-71}{12}\right) = P(Z \geq 0.33) = 1 - P(Z \leq 0.33) = 1 - 0.6293$$
$$= 0.3707$$