MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2026

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2026

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene $A(1,0,2)$ como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano $\pi \equiv x+y+2z+1=0$. Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano π. Se toma el punto $C(0,-3,1)$ de π para calibrar el dron.

a) (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano π y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano π. Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.

b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

b.1) El dron se mueve en linea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto más cercano a C. Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C.

b.2) La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano π para situarse en A', a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A'.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2026 - Opción Única)

Solución.

a) $$d(A,\pi)=\frac{|1+0+4+1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\ u$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi' \parallel \pi\\ A(1,0,2)\in\pi'\end{array}\right\} \Longrightarrow \pi'\equiv x+y+2z+D=0 \xrightarrow{A\in\pi'} 1+0+4+D=0 \Longrightarrow D=-5$$

$$\Longrightarrow \boxed{\pi'\equiv x+y+2z-5=0}$$

b.1) El punto del plano de vuelo π' más cercano al punto $C(0,-3,1)$ será su proyección ortogonal C'. La trayectoria del dron será por tanto la recta que une los puntos $A(1,0,2)$ y C'.

$$r\equiv\begin{cases}C(0,-3,1)\\ \vec{d}_r=\vec{n}_\pi=(1,1,2)\end{cases} \Longrightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=-3+\lambda\\ z=1+2\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

$$C'=r\cap\pi' \Longrightarrow \lambda+(-3+\lambda)+2\cdot(1+2\lambda)-5=0 \Longrightarrow \lambda=1 \Longrightarrow C'(1,-2,3)$$

$$t\equiv\begin{cases}A(1,0,2)\\ \vec{d}_t=\overrightarrow{AC'}=(0,-2,1)\end{cases} \Longrightarrow t\equiv\begin{cases}x=1\\ y=-2\mu\\ z=2+\mu\end{cases},\ \mu\in\mathbb{R}$$

b.2) Vamos a hallar la proyección de A sobre el plano π, que llamaremos A''. El punto A' desde donde se tomará la foto será el punto medio de A y A''.

$$s \equiv \begin{cases} A(1,0,2) \\ \vec{d}_s = \vec{n}_\pi = (1,1,2) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$A'' = s \cap \pi \implies 1+\lambda+\lambda+2\cdot(2+2\lambda)+1 = 0 \implies \lambda = -1 \implies A''(0,-1,0)$$

$$A' = \frac{A+A''}{2} \implies A'(1/2, -1/2, 1)$$

Hallamos la recta f que une los puntos A' y C

$$f \equiv \begin{cases} C(0,-3,1) \\ \vec{d}_f = \overrightarrow{A'C} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right) \approx (1,5,0) \end{cases} \Rightarrow f \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = -3+5\beta \\ z = 1 \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\vec{d}_f \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d}_f\right| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{|(1,5,0)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{13}} \implies \boxed{\alpha = 28.71^\circ}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

> *Dada* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x|+1}$*, se pide:*
>
> *a) (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de* $f(x)$*.*
>
> *b) (1 punto) Hallar* $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$*.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2026 - Opción Única)*

Solución.

a)

- $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{|-x|+1} = \dfrac{x^2+1}{|x|+1} = f(x) \implies f(x)$ tiene simetría par (respecto del eje OY).

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{-x+1} & \text{, si } x \le 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{, si } x > 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+2x+1}{(-x+1)^2} = 0 \implies x = \{1-\sqrt{2}, \cancel{1+\sqrt{2}}\} & \text{, si } x < 0 \\ \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \implies x = \{\cancel{-1-\sqrt{2}}, -1+\sqrt{2}\} & \text{, si } x > 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, 1-\sqrt{2})$	$(1-\sqrt{2}, 0)$	$(0, -1+\sqrt{2})$	$(-1+\sqrt{2}, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(1-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(-1+\sqrt{2}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(0, -1+\sqrt{2}\right)$, y tiene *mínimos relativos* en $\left(1-\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}\right)$ y en $\left(-1+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}\right)$, y un *máximo relativo* en $(0,1)$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{-x+1} \overset{\odot}{=} \int_{-1}^{0} (-x-1)\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{2}{-x+1}\,dx = -\frac{x^2}{2} - x$

$$-2\int_{-1}^{0} \underbrace{\frac{-1}{-x+1}}_{u'/u}\,dx = -\frac{x^2}{2} - x - 2\ln(-x+1)\Big]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{2} + 1 - 2\ln 2\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 4 \simeq 0.886$$

$\odot$

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +1 & -x+1 \\ \cline{3-3} -x^2+x & & -x-1 \\ \cline{1-1} x & +1 & \\ -x & +1 & \\ \cline{1-2} & 2 & \end{array}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo Sphaeropsis daimatica *y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad* escudete. *Se pide:*

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.

b) (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 *bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el* 60 % *de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con* escudete.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2026 - Opción Única)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de aceitunas con la enfermedad" $\longrightarrow X : \mathcal{B}\left(12, \dfrac{1}{20}\right) = \mathcal{B}(12, 0.05)$

$$P(X=0) = \binom{12}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^{12} = 0.5404$$

b) $P(X > 0) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.5404 = 0.4596$

$X \equiv$ "Nº de bolsas con alguna aceituna con la enfermedad" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(100, 0.4596)$

$$X : \mathcal{B}(100, 0.4596) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 100 > 20 \checkmark \\ np = 45.96 > 5 \checkmark \\ nq = 54.04 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(45.96, 4.984)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.6 \cdot 100) &= P(X \geq 60) = P(Y \geq 59.5) = P\left(Z \geq \frac{59.5 - 45.96}{4.984}\right) \\ &= P(Z \geq 2.72) = 1 - P(Z \leq 2.72) = 1 - 0.9967 = 0.0033 \end{aligned}$$

Ejercicio 4A (2 *puntos*)

Sean $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) *(1 punto) Calcular, si existen, los valores de* a *tales que la matriz* $AA^\top$ *sea una matriz diagonal.*

b) *(1 punto) Calcular, si existen, los valores de* a *tales que* $(A-B)\cdot(A+B) = A^2-B^2$.

.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2026 - Opción A)

Solución.

a) $A \cdot A^\top = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2+4 & 2a^2-2 \\ 2a^2-2 & a^2+1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^\top$ es diagonal $\iff 2a^2 - 2 = 0 \implies \boxed{a = \pm 1}$

b) $(A-B)\cdot(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2 \implies AB = BA$

$\begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$

$$\implies \begin{pmatrix} 2a+2 & 4a-4 \\ a-1 & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2a+2 = 4a \implies \boxed{a=1} \\ 4a-4 = 0 \implies a = 1 \\ a - 1 = 0 \implies a = 1 \\ 2a+2 = 4 \implies a = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4B (2 *puntos*)

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$. *Se pide:*

a) *(1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real* λ.

b) *(1 punto) Resolver el sistema si* $\lambda = -1$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2026 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 1 & 7 \\ 1 & 2 & \lambda & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \implies \lambda = \{-1, 4\}$$

- Si $\lambda \neq \{-1,4\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $\lambda = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $\lambda = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{-3+3\lambda}{5} - \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y + 3\lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{16-\lambda}{5} \\ y = \frac{-3+3\lambda}{5} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 5A (2 *puntos*)

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot(-8+\cos x) & ,\ si\ 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ a\cdot \operatorname{sen} x+4 & ,\ si\ \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\\ 2\cdot\operatorname{sen}(2x)+b & ,\ si\ \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

a) *(1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0,2\pi]$.*

b) *(1 punto) Justifique razonadamente que la función $f(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $(0,2\pi)$ y calcule dicha raíz.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2026 - Opción A)

Solución.

a) Las hipótesis del Teorema de Bolzanos determinan que la función sea continua en el intervalo $[0,2\pi]$ y que el signo de $f(0)$ sea distinto del signo de $f(2\pi)$.

- `Continuidad en` $[0,2\pi]$
  - Si $x\neq\{\pi/2,\pi\}$ la función es continua pues tanto el sen como el cos lo son.
  - `Continuidad en` $x=\pi/2$:
    - $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^-} f(x)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{2}\cdot(-8+\cos x)=-4$
    - $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^+} f(x)=\lim_{x\to\pi/2}(a\cdot\operatorname{sen} x+4)=a+4$
    - $f(\pi/2)=a+4$

    $f(x)$ continua en $x=\dfrac{\pi}{2}\iff\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}f(x)=f(\pi/2)\xRightarrow{a+4=-4}\boxed{a=-8}$
  - `Continuidad en` $x=\pi$:
    - $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi}(a\cdot\operatorname{sen} x+4)=4$
    - $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi}(2\cdot\operatorname{sen}(2x)+b)=b$
    - $f(\pi)=b$

    $f(x)$ continua en $x=\pi\iff\displaystyle\lim_{x\to\pi}f(x)=f(\pi)\implies\boxed{b=4}$
- $f(0)=-\dfrac{7}{2}<0$ ✓
- $f(2\pi)=4>0$ ✓

b) Para $a=-8$ & $b=4$, la función $f(x)$ cumple las hipótesis del *Teorema de Bolzano* en el intervalo $[0,2\pi]$, luego $\exists c\in(0,2\pi)\mid f(c)=0$. Vamos a calcularla:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot(-8+\cos x)=0\implies\cos x=8\text{ Imposible} & ,\text{ si } 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ -8\cdot\operatorname{sen} x+4=0\implies\operatorname{sen} x=\dfrac{1}{2}\implies\boxed{x=5\pi/6} & ,\text{ si } \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\\ 2\cdot\operatorname{sen}(2x)+4=0\implies\operatorname{sen}(2x)=-2\text{ Imposible} & ,\text{ si } \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

Ejercicio 5B (2 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$*. Se pide:*

a) (1 punto) Determinar si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Determinar si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2026 - Opción B)

Solución.

a) `Coninuidad de` $f(x)$:

- Si $x \neq 0 \implies f(x)$ es continua ya que $x^2 + 1 > 0 \; \forall x \neq 0$ y el denominador no se anula.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$
  - $f(0) = 0$

  Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \implies f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por lo tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\ln(h^2+1)}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(h^2+1)}{h^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\cancel{2h}}{h^2+1}}{\cancel{2h}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2+1} = 1$

Por lo tanto la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$

c) $x_0 = 0 \implies y_0 = f(0) = 0 \implies (x_0, y_0) = (0, 0)$

$m_r = f'(0) = 1$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \implies \boxed{r \equiv y = x}$