MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -
(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2025 (coincidentes)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

El famoso youtuber Pepe Fogones ha decidido emprender una nueva aventura empresarial y se ha unido con su amigo Cocinauta para lanzar al mercado una exclusiva variedad de té matcha *ecológico. Ambos han invertido parte de sus ahorros en una plantación de té y están analizando los costes de recolección, procesamiento y envasado del té para su distribución. El grupo de asesores contratado por Pepe Fogones y Cocinauta ha logrado modelar los costes marginales mensuales, en euros mediante la siguiente función:*

$$c(x) = \frac{x+10}{50}, \quad 0 < x < 100$$

siendo x la cantidad mensual, en kilos, de té matcha *envasado.*
Los asesores contratados por Pepe Fogones y su socio han hecho, además, un estudio de los beneficios que obtiene con sus redes sociales, representados en euros mediante la siguiente función de beneficios:

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2+2}, \quad t \geq 0$$

siendo t el tiempo transcurrido a partir del momento en que han hecho el estudio.

a) (1 punto) Calcule el coste de envasar x kilos de té matcha *sabiendo que el coste de envasar el primer kilo es de 121.21 euros. Tenga en cuenta que la función de costes marginales es la derivada de la función de costes.*

b) (1.5 puntos) Analice si, con el transcurso del tiempo, el beneficio que obtiene Pepe Fogones con sus redes sociales crece o no, cuál es el máximo beneficio y en qué momento se alcanza. Estudie qué pasaría con el beneficio a largo plazo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Coincidentes)

Solución.

a) $C(x) = \int c(x)\,dx = \int \frac{x+10}{50}\,dx = \frac{1}{50}\cdot\left(\frac{x^2}{2}+10x\right)+K = \frac{x^2+20x}{100}+K$

$C(1) = 121.21 \implies \frac{21}{100}+K = 121.21 \xrightarrow{K=121} \boxed{C(x) = \frac{x^2+20x}{100}+121,\ 0<x<100}$

b) $B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2+2} = \frac{80000}{t^2-2t+3}$ & $B'(t) = \frac{-80000\cdot(2t-2)}{(t^2-2t+3)^2} = 0 \implies t=1$

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $B'(t)$	+	-
$B(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

El beneficio $B(t)$ es *creciente* en $(0,1)$ y *decreciente* en $(1,+\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $t=1$, momento en el que vale $B(1) = 40000$ €.

$\lim_{t\to+\infty} B(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{80000}{t^2-2t+3} = 0$, luego el beneficio tiende a desaparecer.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) (1.25 puntos) Calcule las matrices A^{20} y A^{21}.

b) (1.25 puntos) Calcule la matriz X que verifique la igualdad $XA = BB^\top A^{-1}$, donde $B^\top$ indica la matriz traspuesta de B.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Coincidentes)

Solución.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^{20} = A^{2\cdot 10} = \left(A^2\right)^{10} = I^{10} = I$

$A^{21} = A^{20} \cdot A = I \cdot A = A$

b) $XA = BB^\top A^{-1} \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = BB^\top A^{-1} \cdot A^{-1} \xRightarrow{A\cdot A = I \Rightarrow A^{-1} = A}$

$X = BB^\top \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \implies \boxed{X = BB^\top}$

$$X = BB^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y = a + 1 \\ ay + z = -2a \\ -ax + az = -2 \end{cases}$$

a) *(1.5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a+1 \\ 0 & a & 1 & -2a \\ -a & 0 & a & -2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - a = a \cdot (a^2 - 1) = 0 \implies a = \{-1, 0, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 0, 1\}$ $\;|A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -x - 2 + \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y + \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.
La cantidad anual donada por familia a actividades de interés social se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica de 40 euros.

a) (1.25 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 familias resultó que la donación media fue de 360 euros. Obtenga un intervalo de confianza del 90 % para estimar la cantidad media donada por familia a actividades de interés social.

b) (1.25 puntos) Determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de familias del municipio para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación de la cantidad media donada por familia no supere los 10 euros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad anual donada por familia (euros)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 40)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 40) \xrightarrow{n=64} \overline{x} = 360 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.90$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{\textit{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{40}{\sqrt{64}} = 8.225$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (351.775; 368.225)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 10 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{\textit{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{40}{\sqrt{n}} < 10 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{40}{10}\right)^2 = 61.47 \implies \boxed{n = 62}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

Se sabe que el 70 % de las familias del municipio destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social. Si se seleccionan 200 familias al azar:

a) (1 punto) Indique la distribución de la variable aleatoria $X \equiv$"número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social". Determine el número esperado de familias con esta propiedad.

b) (1.5 puntos) Mediante la aproximación por una distribución normal, calcule la probabilidad de que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Coincidentes)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de familias que no donan dinero" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(200, 0.3)$

$E[X] = np = 200 \cdot 0.3 = 60$ familias

b) $X' \equiv$ "Nº de familias que donan dinero" $\longrightarrow X' : \mathcal{B}(200, 0.7)$

$$X' : \mathcal{B}(200, 0.7) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} n = 200 > 20 \checkmark \\ np = 140 > 5 \checkmark \\ nq = 60 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \longrightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(140, 6.48)$$

$$\begin{aligned} P(138 \leq X' \leq 145) &= P(137.5 \leq Y \leq 145.5) = P\left(\frac{137.5 - 140}{6.48} \leq Z \leq \frac{145.5 - 140}{6.48}\right) \\ &= P(-0.39 \leq Z \leq 0.85) = P(Z \leq 0.85) - P(Z \leq -0.39) \\ &= P(Z \leq 0.85) - P(Z \geq 0.39) = P(Z \leq 0.85) - [1 - P(Z \leq 0.39)] \\ &= 0.8023 - (1 - 0.6517) = 0.454 \end{aligned}$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos resultado de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0.5 \qquad \& \qquad P(\overline{B}) = 0.4 \qquad \& \qquad P(A \cup B) = 0.8$$

siendo $\overline{B}$ el suceso complementario de B.

a) (1 punto) Calcule $P(B \mid \overline{A})$, siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

b) (0.75 puntos) Calcule $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

c) (0.75 puntos) Justifique si los sucesos A y B son independientes o no.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Coincidentes)

Solución.

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.4 = 0.6$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.6 - 0.8 = 0.3$

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.6 - 0.3}{1 - 0.5} \implies \boxed{P(B \mid \overline{A}) = 0.6}$$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 \implies \boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.2}$

c) $$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \end{array}\right\} \implies \left| \begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ son independientes} \end{array}\right.$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Un ayuntamiento ha sacado a concurso una convocatoria para la construcción de un Centro de Salud de Atención Primaria. Al concurso se han presentado tres constructoras, Horizon, Vértice XXI y CuadraNova, que tienen una probabilidad de conseguir el contrato de 0.5; 0.3 *y* 0.2 *respectivamente. La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista es de* 0.6 *si la obra se le encarga a Horizon,* 0.2 *si se le adjudica a Vértice XXI y* 0.9 *si la realiza CuadraNova.*

a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista.

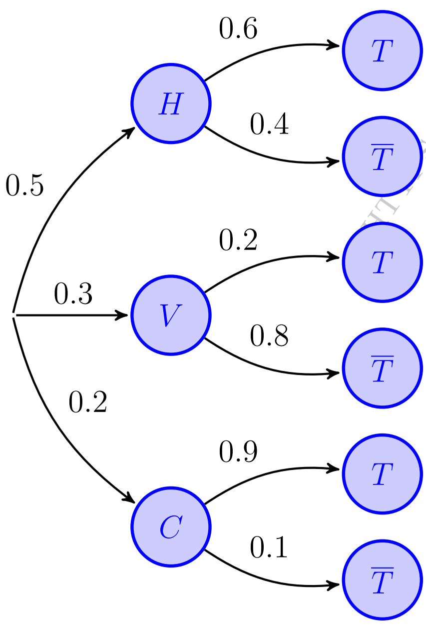
b) (1.25 puntos) Transcurrido el plazo previsto para la ejecución de la obra se constató que el Centro de Salud de Atención Primaria no estaba terminado. Obtenga la probabilidad de que la obra hubiera sido adjudicada a Vértice XXI.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$H \equiv$ "La obra es adjudicada a la constructora Horizon"
$V \equiv$ "La obra es adjudicada a la constructora Vértice XXI"
$C \equiv$ "La obra es adjudicada a la constructora CuadraNova"
$T \equiv$ "La obra se ejecuta en el plazo previsto"



a) $$\begin{aligned} P(T) &= P\big((H\cap T)\cup(V\cap T)\cup(C\cap T)\big) \\ &= P(H\cap T)+P(V\cap T)+P(C\cap T) \\ &= P(H)\cdot P(T\mid H)+P(V)\cdot P(T\mid V) \\ &+ P(C)\cdot P(T\mid C) = 0.5\cdot 0.6 \\ &+ 0.3\cdot 0.2 + 0.2\cdot 0.9 = 0.54 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(V\mid \overline{T}) &= \frac{P(V\cap\overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(V)\cdot P(\overline{T}\mid V)}{1-P(T)} \\ &= \frac{0.3\cdot 0.8}{1-0.54} = 0.5217 \end{aligned}$$