uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2024-2025** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**C**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El famoso *youtuber* Pepe Fogones ha decidido emprender una nueva aventura empresarial y se ha unido con su amigo Cocinauta para lanzar al mercado una exclusiva variedad de té *matcha* ecológico. Ambos han invertido parte de sus ahorros en una plantación de té y están analizando los costes de recolección, procesamiento y envasado del té para su distribución. El grupo de asesores contratado por Pepe Fogones y Cocinauta ha logrado modelar los costes marginales mensuales, en euros, mediante la siguiente función:

$$c(x) = \frac{x+10}{50}, \qquad 0 < x < 100$$

siendo x la cantidad mensual, en kilos, de té *matcha* envasado.
Los asesores contratados por Pepe Fogones y su socio han hecho, además, un estudio de los beneficios que obtiene con sus redes sociales, representados en euros mediante la siguiente función de beneficios:

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2+2}, \quad t \geq 0$$

siendo t el tiempo transcurrido a partir del momento en que han hecho el estudio.

1.a) (1 punto) Calcule el coste de envasar x kilos de té *matcha* sabiendo que el coste de envasar el primer kilo es de $121,21$ euros. Tenga en cuenta que la función de costes marginales es la derivada de la función de costes.

1.b) (1,5 puntos) Analice si, con el transcurso del tiempo, el beneficio que obtiene Pepe Fogones con sus redes sociales crece o no, cuál es el máximo beneficio y en qué momento se alcanza. Estudie qué pasaría con el beneficio a largo plazo.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **2.1** o **2.2**.

Pregunta 2.1
Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1,25 puntos) Calcule las matrices A^{20} y A^{21}.

2.1.b) (1,25 puntos) Calcule la matriz X que verifique la igualdad $XA = BB^tA^{-1}$, donde B^t indica la matriz traspuesta de B.

Pregunta 2.2
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y = a+1 \\ ay + z = -2a \\ -ax + az = -2 \end{cases}$$

2.2.a) (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

2.2.b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **3.1** o **3.2**.

Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

Pregunta 3.1
La cantidad anual donada por familia a actividades de interés social se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica de 40 euros.

3.1.a) (1,25 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 familias resultó que la donación media fue de 360 euros. Obtenga un intervalo de confianza del $90\,\%$ para estimar la cantidad media donada por familia a actividades de interés social.

3.1.b) (1,25 puntos) Determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de familias del municipio para garantizar, con un nivel de confianza del $95\,\%$, que el margen de error en la estimación de la cantidad media donada por familia no supere los 10 euros.

Pregunta 3.2
Se sabe que el $70\,\%$ de las familias del municipio destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social. Si se seleccionan 200 familias al azar:

3.2.a) (1 punto) Indique la distribución de la variable aleatoria $X =$"número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social". Determine el número esperado de familias con esta propiedad.

3.2.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una distribución normal, calcule la probabilidad de que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **4.1** o **4.2**.

Pregunta 4.1
Sean A y B dos sucesos resultado de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}5$, $P(\bar{B}) = 0{,}4$ y $P(A \cup B) = 0{,}8$, siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de B.

4.1.a) (1 punto) Calcule $P(B \mid \bar{A})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

4.1.b) (0,75 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

4.1.c) (0,75 puntos) Justifique si los sucesos A y B son independientes o no.

Pregunta 4.2
Un ayuntamiento ha sacado a concurso una convocatoria para la construcción de un Centro de Salud de Atención Primaria. Al concurso se han presentado tres constructoras, Horizon, Vértice XXI y CuadraNova, que tienen una probabilidad de conseguir el contrato de $0{,}5$; $0{,}3$ y $0{,}2$ respectivamente. La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista es de $0{,}6$ si la obra se le encarga a Horizon, $0{,}2$ si se le adjudica a Vértice XXI y $0{,}9$ si la realiza CuadraNova.

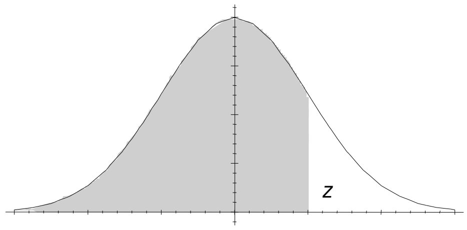
4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista.

4.2.b) (1,25 puntos) Transcurrido el plazo previsto para la ejecución de la obra se constató que el Centro de Salud de Atención Primaria no estaba terminado. Obtenga la probabilidad de que la obra hubiera sido adjudicada a Vértice XXI.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

1.a) La función de costes es la primitiva de la función de costes marginales:

$$C(x)=\int\left(\frac{x+10}{50}\right)d\,x=\frac{(x+10)^2}{100}+k$$

Como $121,21=C(1)=k+1,21$, entonces $k=120$ y la función de coste total de envasar x kilos es:

$$C(x)=\frac{(x+10)^2}{100}+120=\frac{x^2}{100}+\frac{x}{5}+121$$

1.b) Se analiza el crecimiento/decrecimiento de la función de beneficio, $B(t)$ para $t>0$.

$$B'(t)=0\Longleftrightarrow t=1\Longrightarrow\begin{cases}(0,1) & B \text{ es creciente}\\(1,\infty) & B \text{ es decreciente}\end{cases}$$

Por tanto, el beneficio que consigue Pepe Fogones con sus redes sociales aumenta solo a lo largo del primer año a partir del momento del estudio. Al cabo del primer año obtiene el máximo beneficio, siendo este de 400000€. A partir de ese momento el beneficio decrece.

$\lim\limits_{x\to\infty}B(t)=0$. El beneficio tiende a 0 y Pepe Fogones a largo plazo apenas obtendría beneficios por sus redes sociales.

EJERCICIO 2

Pregunta 2.1

2.1.a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

entonces $A=A^{-1}$

$$A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A$$

y así sucesivamente se obtiene que $A^{20}=I$ y $A^{21}=A$

2.1.b) La matriz A verifica la igualdad $A=A^{-1}$. Por tanto, $X=BB^t$

$$X=BB^t=\begin{pmatrix}3&-3\\-3&3\end{pmatrix}$$

Pregunta 2.2

2.2.a) $|A|=a^3-a=0\Longleftrightarrow a=0,a=\pm1$

Si $a\neq\pm1,\,0\Longrightarrow Rg(A)=Rg(A|B)=3\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $a=0$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow Rg(A)=2\neq Rg(A|B)=3\Longrightarrow \text{ Sistema Incompatible.}$$

Si $a=1$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&1&1&-2\\-1&0&1&-2\end{array}\right)\overset{f_3+f_1}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&-2\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow Rg(A)=2\neq Rg(A|B)=3\Longrightarrow \text{ Sistema Incompatible.}$$

Si $a=-1$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\0&-1&1&2\\1&0&-1&-2\end{array}\right)\overset{f_3+f_1}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\0&-1&1&2\\0&1&-1&-2\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow Rg(A)=2\neq Rg(A|B)=2\Longrightarrow \text{ Sistema Compatible Indeterminado.}$$

2.2.b)

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\0&-1&1&2\\0&1&-1&-2\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow x=y,\ z=y+2$$

Por tanto, la solución es $x=\lambda,\quad y=\lambda,\quad z=\lambda+2.$

EJERCICIO 3

Pregunta 3.1

3.1.a) La variable aleatoria X="Cantidad anual donada por familia a actividades de interés social" sigue una distribución $N(\mu, 40)$.

Para obtener el intervalo de confianza del $90\,\%$ para la media usamos la fórmula:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sustituyendo los valores:

$$360 \pm 1{,}645 \frac{40}{\sqrt{64}} = 360 \pm 1{,}645 \cdot 5$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza del $90\,\%$ para la media de las donaciones anuales de las familias es $(351{,}775; 368{,}225)$.

3.1.b) Para calcular el tamaño mínimo de muestra n, utilizamos la fórmula:

$$n \geq \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{E}\right)^2$$

Sustituyendo los valores:

$$n \geq \left(\frac{1{,}96 \cdot 40}{10}\right)^2 = 61{,}47$$

Por lo tanto, el tamaño mínimo de muestra necesario es de 62 familias.

Pregunta 3.2

3.2.a) Si X="Número de familias que no destina parte de su presupuesto a actividades de interés social", X sigue una distribución $B(n = 200, p = 0,3)$ con esperanza $E(X) = n \cdot p = 60$. El número de esperado de familias que no destina parte de su presupuesto a actividades de interés social es de 60.

3.2.b)

$$\hat{p} = \frac{140}{200} = 0{,}7$$

Se cumple que $n \geq 30$, $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, por lo tanto, podemos utilizar la aproximación a la distribución normal y tenemos que $Y \sim N(140; 6{,}481)$. Aplicando la corrección por continuidad, la probabilidad pedida puede calcularse, entonces, como:

$$\begin{aligned} P(137{,}5 < Y < 145{,}5) &= P\left(\frac{137{,}5 - 140}{6{,}481} < Z < \frac{145{,}5 - 140}{6{,}481}\right) = \\ &= P(-0{,}386 < Z < 0{,}849) = P(Z < 0{,}849) - P(Z < -0{,}386) = \\ &= P(Z < 0{,}849) - (1 - P(Z < 0{,}386)) = 0{,}454. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

Pregunta 4.1

Se verifica que que $P(A) = 0{,}5$, $P(\bar{B}) = 0{,}4$ y $P(A \cup B) = 0{,}8$.

Además $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}3$

4.1.a) $P(B \mid \bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6.$

4.1.b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}2.$

4.1.c)$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, entonces A y B son sucesos independientes.

Pregunta 4.2

Definimos los sucesos A="Contratar Horizon", B ="Contratar Vértice XXI", C ="Contratar Cuadranova" y T ="Estar terminado en la fecha prevista".

4.2.a) La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \mid A) \cdot P(A) + P(T \mid B) \cdot P(B) + P(T \mid C) \cdot P(C) = \\ &= 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}54. \end{aligned}$$

4.2.b) La probabilidad pedida es:

$$P(B \mid \bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \mid B) \cdot P(B)}{P(\bar{T})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}3}{0{,}46} = 0{,}522.$$

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Apartado (1.a): 1 punto.

Cálculo correcto de la primitiva .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la constante .... 0,25 puntos.

Expresión correcta de $C(x)$ .... 0,25 puntos.

Apartado (1.b): 1,5 puntos.

Estudio correcto de los intervalos de crecimiento y decrecimiento ...... 0,50 puntos.

Cálculo correcto del máximo y su valor .... 0,50 puntos.

Estudio correcto del beneficio a largo plazo .... 0,25 puntos.

Contextualización de las soluciones .... 0,25 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 2.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (2.1.a): 1,25 puntos.

Cálculo correcto de A^2 .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de A^{20} .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de A^{21} .... 0,25 puntos.

Apartado (2.1.b): 1,25 puntos.

Identificación de A como A^{-1} .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la expresión de X .... 0,25 puntos.

Obtención correcta de la matriz X .... 0,75 puntos.

Pregunta 2.2 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (2.2.a): 1,5 puntos.

Cálculo correcto de los valores críticos.. 0,50 puntos.

Discusión correcta del sistema .... 1 punto.

Apartado (2.2.b): 1 puntos.

Obtención de la solución del sistema .... 1 punto.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 3.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (3.1.a): 1,25 punto.

Determinación del valor $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Aplicación de la fórmula del error y obtención del mismo .... 0,75 puntos.

Determinación correcta del intervalo de confianza .... 0,25 puntos.

Apartado (3.1.b): 1,25 puntos.

Determinación del valor crítico $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Planteamiento con la aplicación de la fórmula del error .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto del tamaño mínimo de la muestra .... 0,50 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Pregunta 3.2 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (3.2.a): 1 punto.

Determinación de la distribución y sus parámetros........................... 0,50 puntos.

Cálculo correcto del número esperado de familias pedido .... 0,50 puntos.

Apartado (3.2.b): 1,5 puntos.

Aproximación correcta y justificada a la distribución normal .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad pedida .... 1 punto.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 4.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (4.1.a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (4.1.b): 0,75 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,25 puntos.

Apartado (4.1.c): 0,75 puntos.

Justificación correcta de la independencia de los sucesos................. 0,75 puntos.

Pregunta 4.2 (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Apartado (4.2.a): 1,25 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,75 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (4.2.b): 1,25 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,75 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

La NO definición de los sucesos se penalizará con 0,25 puntos en la puntuación total de la pregunta.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.