MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2025
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

> *Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas).*
>
> *(Navarra - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)*

Solución.

Sean $x \equiv$ "Nº de máquinas a emplear" y $t \equiv$ "Nº de horas de trabajo". La relación entre ambas magnitudes viene dada por la expresión: $t = \dfrac{80}{x}$.

Los gastos son de 10 € por máquina, 5 € por cada hora de uso (80 en total para la realización del trabajo) y 18 € por cada hora que dure el trabajo (t horas en nuestro caso).

$$G(x) = 10x + 5 \cdot 80 + 18t = 10x + 400 + 18\frac{80}{x} = \frac{10x^2 + 400x + 1440}{x}$$

$$G'(x) = \frac{(20x + 400) \cdot x - (10x^2 + 400x + 1440)}{x^2} = \frac{10x^2 - 1440}{x^2} = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = -12} \\ x = 12 \end{cases}$$

	$(0, 12)$	$(12, +\infty)$
Signo $G'(x)$	$-$	$+$
$G(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

El gasto $G(x)$ es *decreciente* en $(0, 12)$ y *creciente* en $(12, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo*, que es al mismo tiempo *absoluto*, en $x = 12$. Luego con 12 máquinas tendremos un gasto mínimo que ascenderá a $G(12) = 640$ €.

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Siendo $p(t) = 0.15 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$ *el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes* $t_0 = 0$ *y* $t_1 = 1$*:*

a) *(1.25 puntos) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo.*

b) *(1.25 puntos) Calcula el precio medio* $\overline{p}$ *de la luz entre los instantes* $t_0 = 0$ *y* $t_1 = 1$*, sabiendo que el valor medio de una función continua* f *en el intervalo* $[a,b]$ $(a<b)$ *es:*

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Observación: *Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.*

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $p(t) = 0.15 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$

$$p'(t) = \cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi t}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\tfrac{\pi t}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}^3\left(\tfrac{\pi t}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi t}{2}\right)\cdot\left[\pi\cdot\cos^2\left(\tfrac{\pi t}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\pi t}{2}\right)\right]$$

$$p'(t) = 0 \implies \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0 \implies \dfrac{\pi t}{2} = 0 \implies t = 0 \\ \pi\cdot\cos^2\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) - \dfrac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0 \implies \tan^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 2 \\ \qquad \implies \begin{cases} \dfrac{\pi t}{2} = \arctan\left(\sqrt{2}\right) \implies t = 0.6082 \\ \dfrac{\pi t}{2} = \arctan\left(-\sqrt{2}\right) \implies \cancel{t = -0.6082} \end{cases} \end{cases}$$

	$(0, 0.6082)$	$(0.6082, 1)$
Signo $p'(t)$	$+$	$-$
$p(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

El precio del kw/h $p(t)$ es *creciente* en $(0, 0.6082)$ y *decreciente* en $(0.6082, 1)$, y, teniendo en cuenta que $p(0) = p(1) = 0.15$ y $p(0.6082) = 0.5349$, el precio del kw/h tiene un *mínimo absoluto* en $t = 0$ y $t = 1$ igual a 0.15.

b) $$I = \int p(t)\,dt = \int\left[0.15 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right]dt = \left\{\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right) \\ du = \dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right)dt \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right)dt = \dfrac{2}{\pi}\,du \end{array}\right\}$$

$$= 0.15t + \int u^2\cdot\frac{2}{\pi}\,du = 0.15t + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{u^3}{3} = 0.15t + \frac{2u^3}{3\pi} = 0.15t + \frac{2}{3\pi}\cdot\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$$

$$\overline{p} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 p(t)\,dt = I(1) - I(0) = \left(0.15 + \frac{2}{3\pi}\right) - 0 = 0.3622 \text{ € el kw/h}$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2-3m)\cdot x - my + 2mz = 3 \\ (m^2-3m)\cdot x + 3y + 3mz = m+9 \\ (3m-m^2)\cdot x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ m^2-3m & 3 & 3m & m+9 \\ 3m-m^2 & m & -m & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m\cdot(m^2-3m)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -m & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & m & -1 \end{vmatrix} = m\cdot(m^2-3m)\cdot(m+3) = 0 \Rightarrow m = \{0, \pm 3\}$$

- Si $m \neq \{0,\pm 3\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).
  Resolvemos por el método de *Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -m & 2m \\ m+9 & 3 & 3m \\ 0 & m & -m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{m}\cdot\cancel{(m^2-9)}}{m^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(m-3)}\cdot\cancel{(m+3)}} = \frac{1}{m}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m^2-3m & 3 & 2m \\ m^2-3m & m+9 & 3m \\ 3m-m^2 & 0 & -m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{m^2}\cdot\cancel{(m-3)}\cdot\cancel{(m+3)}}{\cancel{m^2}\cdot\cancel{(m-3)}\cdot\cancel{(m+3)}} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m^2-3m & -m & 3 \\ m^2-3m & 3 & m+9 \\ 3m-m^2 & m & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3\cancel{m}\cdot\cancel{(m-3)}\cdot\cancel{(m+3)}}{m^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(m-3)}\cdot\cancel{(m+3)}} = \frac{3}{m}$$

- Si $m = 0 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 1$

$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 3 & -6 & 3 \\ 18 & 3 & -9 & 6 \\ -18 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 3 & -9 & 6 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

  Resolvemos por el método de Gauss el sistema formado por las ecuaciones linealmente independientes:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 3 & -6 & 3 \\ 18 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x = \lambda \\ \Rightarrow 18\lambda + 3y + 6 = 3 \\ \Rightarrow -3z = 3 \end{array}$$

  $$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -1 - 6\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{array}}$$

- Si $m = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 12 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

  Resolvemos por el método de Gauss el sistema formado por las ecuaciones linealmente independientes:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \end{array}\right)$$

  $$\begin{array}{ll} \Rightarrow x = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y + 6 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 15z = 15 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = 2$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 2 \cdot \left(A \cdot B^{\top}\right)^2 \cdot \left(B^{\top}\right)^{-1}$$

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

$$|C| = \left|2 \cdot \left(A \cdot B^{\top}\right)^2 \cdot \left(B^{\top}\right)^{-1}\right| = 2^3 \cdot \left|A \cdot B^{\top}\right|^2 \cdot \left|\left(B^{\top}\right)^{-1}\right| = 8 \cdot \left(|A| \cdot \left|B^{\top}\right|\right)^2 \cdot \frac{1}{|B^{\top}|}$$

$$= 8 \cdot |A|^2 \cdot |B|^2 \cdot \frac{1}{|B|} = 8 \cdot \frac{1}{4^2} \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $P(2,0,-1)$ y corta a las siguientes rectas:

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-6=0 \\ 2x-3z-8=0 \end{cases} \qquad \& \qquad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

$$s \equiv \begin{cases} S(4,-2,0) \\ \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3,0,-2) \end{cases} \qquad \& \quad r \equiv \begin{cases} R(-1,0,-2) \\ \vec{d_r} = (2,1,1) \end{cases}$$

La recta t será la intersección de los planos π_1, que contiene a P y r y π_2, que contiene a P y s.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} P(2,0,-1) \\ \vec{d_r} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{PR} = (-3,0,-1) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(x-2) - y + 3\cdot(z+1) = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x+y-3z-5=0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} P(2,0,-1) \\ \vec{d_s} = (-3,0,-2) \\ \overrightarrow{PS} = (2,-2,1) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4\cdot(x-2) - y + 6\cdot(z+1) = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 4x+y-6z-14=0$$

$$t \equiv \begin{cases} x+y-3z-5=0 \\ 4x+y-6z-14=0 \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} P(2,0,-1) \\ \vec{d_t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-3,-6,-3) \approx (1,2,1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos $A(1,0,-1)$ *y* $B(1,4,2)$ *y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto* $P(6,-4,-4)$.

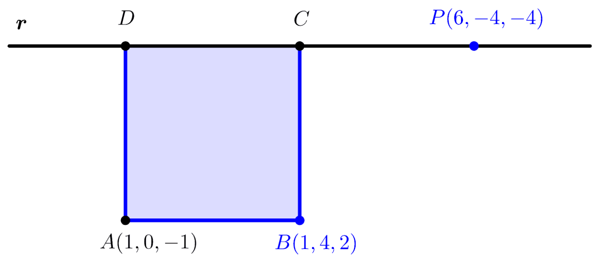
a) (0.5 puntos) Calcula la ecuación de dicha recta.

b) (0.75 puntos) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ *que pasa por* A.

c) (1.25 puntos) Calcula los otros dos vértices del cuadrado.

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.



a) $r \equiv \begin{cases} P(6,-4,-4) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{AB} = (0,4,3) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 6 \\ y = -4+4\lambda \\ z = -4+3\lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\pi \equiv \begin{cases} A(1,0,-1) \\ \vec{n}_\pi = \overrightarrow{AB} = (0,4,3) \end{cases} \implies \pi \equiv 4y+3z+D = 0 \xRightarrow[D=3]{A\in\pi} \boxed{\pi \equiv 4y+3z+3=0}$

c) $D = r \cap \pi \implies 4\cdot(-4+4\lambda)+3\cdot(-4+3\lambda)+3 = 0 \xRightarrow{\lambda=1} \boxed{D(6,0,-1)}$

$C = D + \overrightarrow{AB} = (6,0,-1)+(0,4,3) \implies \boxed{C(6,4,2)}$

Comprobamos que $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AD}\right|$

$\left|\overline{AB}\right| = |(0,4,3)| = \sqrt{25} = 5 \qquad \& \qquad \left|\overline{AD}\right| = |(5,0,0)| = \sqrt{25} = 5$

Luego la figura resultante es, en efecto, un cuadrado

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln\left(x^2 + x - 5\right)$.

a) (0.75 puntos) Demuestra que f *es continua en* $[2, 3]$.

b) (1.75 puntos) Demuestra que existe un punto c *en* $(2, 3)$ *tal que* $f'(c) = 0$*. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso.*

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) Llamamos $f_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \quad \& \quad f_2(x) = \ln\left(x^2 + x - 5\right)$

- $\text{Dom}(f_1) = \mathbb{R}$, ya que es una función coseno.
- $\text{Dom}(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 5 > 0\} \implies \text{Dom}(f_2) = (-\infty, -2.79) \cup (1.79, +\infty)$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $[2, 3]$ pues en dicho intervalo es composición de funciones continuas.

b) Vemos que en los extremos del intervalo la función vale $f(2) = f(3) = 0$. Además la función $f(x)$ no solo es continua en ese intervalo, sino también derivable, al ser composición de funciones derivables. Por lo tanto hemos de pensar en el *Teorema de Rolle:*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(x) \text{ es continua en } [2,3] \\ \bullet\ f(x) \text{ derivable en } (2,3) \\ \bullet\ \text{f(2)=f(3)} \end{array}\right\} \xrightarrow[\textit{Rolle}]{\textit{Th.}} \exists c \in (2,3) \mid f'(c) = 0 \text{ q.e.d}$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2-4}$. *Estudia sus asíntotas y simetrías. Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales.*

(Navarra - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

- `Simetrías:` $f(-x) = \dfrac{3\cdot(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\dfrac{3x^3}{x^2-4} = -f(x) \implies f(x)$ simetría IMPAR
- `Asíntotas`
  - `Dominio:` $x^2-4=0 \implies x=\pm 2 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}-\{\pm 2\}$
  - `A. Vertical:` $\exists A.V.$ en $x=-2$ y $x=2$
    - $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \left[\dfrac{-24}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \left[\dfrac{-24}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \left[\dfrac{-24}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$
    - $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \left[\dfrac{24}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{24}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{24}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$
  - `A. Horizontal` $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^3}{x^2-4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \infty \implies \nexists A.H.$
  - `A. Oblicua:` $\exists A.O.$ en $y=3x$
    - $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^3}{x^3-4x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{3}{1} = 3$
    - $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{3x^3}{x^2-4} - 3x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{3x^3} - \cancel{3x^3} + 12x}{x^2-4}$

      $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{12x}{x^2-4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$