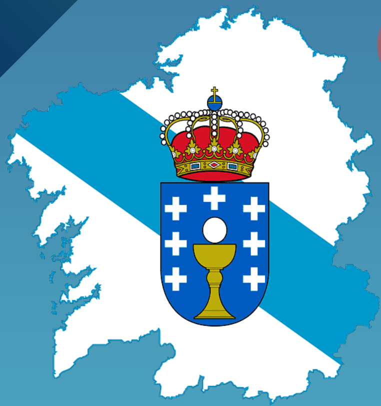
MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2025
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0.6 pasarán a una segunda campaña colocando cartelería luminosa en lugares estratégicos.
Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0.3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0.4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

a) ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad?

b) Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelería luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25 % también la concocen por la cartelería luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelería luminosa, el 20 % también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelería luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?

c) ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción Única)

Solución.

$$E \equiv \text{“Conocer la nueva crema por prensa escrita”}$$
$$B \equiv \text{“Conocer la nueva crema por buzoneo”}$$

$$P(E) = 0.3 \qquad \& \qquad P(B) = 0.4 \qquad \& \qquad P(E \cap B) \overset{E \text{ y } B}{\underset{\text{Indep}}{=}} P(E) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

a) $P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.58 < 0.6$, luego se lanzará la segunda campaña.

b) Sea además el suceso $L \equiv$ "conocer la crema por la cartelería luminosa". Tenemos:

$$P(L \mid B) = 0.25 \qquad \& \qquad P(B \mid L) = 0.2$$

$$P(L \mid B) = \frac{P(L \cap B)}{P(B)} = \frac{P(L \cap B)}{0.4} = 0.25 \implies P(L \cap B) = 0.1$$

$$P(B \mid L) = \frac{P(B \cap L)}{P(L)} = \frac{0.1}{P(L)} = 0.2 \implies P(L) = 0.5.$$

Dado que $P(E) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(L) = 0.5$, el mayor impacto lo ha producido la cartelería luminosa.

c) $P(E \cap B) = 0.12 \neq 0 \implies$ los sucesos E y B no son incompatibles.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Dada la matrz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule la matriz inversa de A, A^{-1}.

b) Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A, $\left(A^{\top}\right)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

c) Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^{\top} = X$.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = -3 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1} \quad \& \quad \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj} A^{\top} \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

b) $\left(A^{\top}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\top} \implies \boxed{\left(A^{\top}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 7/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix}}$

c) $AX - A^{\top} = X \implies AX - X = A^{\top} \implies (A - I) \cdot X = A^{\top}$

$$\implies \underbrace{(A-I)^{-1} \cdot (A-I)}_{I} \cdot X = (A-I)^{-1} \cdot A^{\top} \implies \boxed{X = (A-I)^{-1} \cdot A^{\top}}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A - I| = 4 \quad \& \quad (A-I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A-I)^{-1} \cdot A^{\top} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4 \qquad x + y \leq 8 \qquad 3x + 2y \geq -2 \qquad x - 2 \leq 2y$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.

c) Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

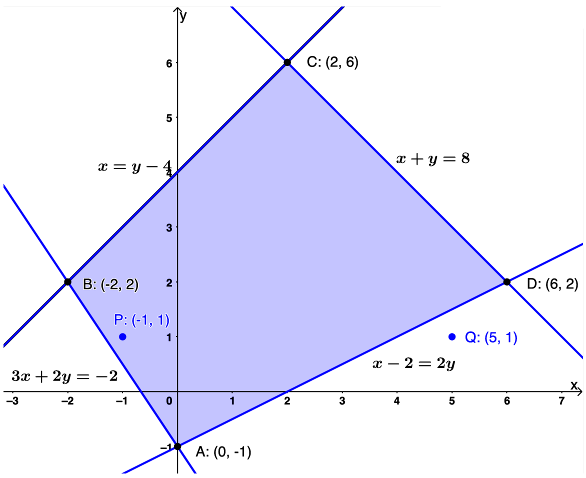
$$\begin{cases} \text{1} \; x \geq y - 4 & \rightarrow (0,4) \quad \& \quad (-4,0) \\ \text{2} \; x + y \leq 8 & \rightarrow (0,8) \quad \& \quad (8,0) \\ \text{3} \; 3x + 2y \geq -2 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (-2/3,0) \\ \text{4} \; x - 2 \leq 2y & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (2,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 2x - 4y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	-1	4
B	-2	2	-12
C	2	6	-20
D	6	2	4



b) $P(-1,1) \in$ R.F. pues 1 $-1 \geq 1 - 4$ ✓ & 2 $-1 + 1 \leq 8$ ✓

3 $-3 + 2 \geq -2$ ✓ & 4 $-1 - 2 \leq 2$ ✓

$Q(5,1) \notin$ R.F. pues 1 $5 \geq 1 - 4$ ✓ & 2 $5 + 1 \leq 8$ ✓

3 $15 + 2 \geq -2$ ✓ & 4 $5 - 2 \not\leq 2$!!

c) El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -20 y se produce en el vértice $C : (2,6)$.

El *máximo* de $f(x,y)$ es de 4 y se produce en cualquier punto del segmento que une los vértices $A : (0,-1)$ y $D : (6,2)$.

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Dada la siguiente función:

$$B(t) = (4-t)\cdot(t-1)^2 \qquad 0 \le t \le 4$$

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen.

b) Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

c) Represente la gráfica de la función $B(t)$.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

$$B(t) = (4-t)\cdot(t-1)^2 = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4 \qquad 0 \le t \le 4$$

a) $B'(t) = -3t^2 + 12t - 9 = 0 \implies t = \{1, 3\}$

	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,4)$
Signo $B'(t)$	-	+	-
$B(t)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

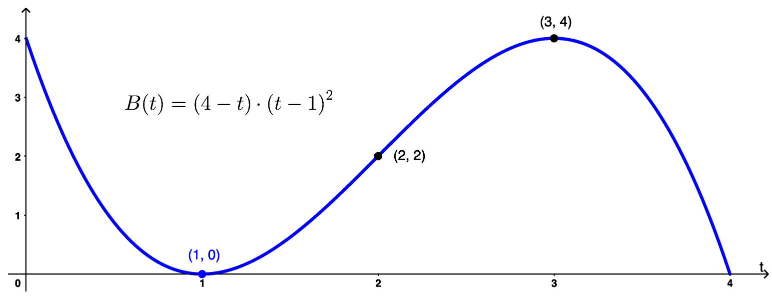
La función $B(t)$ es *creciente* en $(1,3)$ y *decreciente* en $(0,1)\cup(3,4)$. Como $B(0)=4$ y $B(4)=0$, tiene *mínimos absolutos* en $(1,0)$ y $(4,0)$ y *máximos absolutos* en $(0,4)$ y $(3,4)$.

b) $B''(t) = -6t + 12 = 0 \implies t = 2$

	$(0,2)$	$(2,4)$
Signo $B''(t)$	+	-
$B(t)$	Convexa $\cup$	Cóncava $\cap$

La función $B(t)$ es *convexa* ($\cup$) en $(0,2)$ y *cóncava* ($\cap$) en $(2,4)$, y tiene un *punto de inflexión* en $(2,2)$.

c) Representamos la función con los datos obtenidos en los apartados anteriores:



Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a, b números reales.

a) Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto $(4, 5)$ y tiene un mínimo en $x = 1$.

b) Para $a = 1$ y $b = -2$, calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

$$f(x) = ax^2 + bx - 3 \qquad \& \qquad f'(x) = 2ax + b \qquad \& \qquad f''(x) = 2ax$$

a) $$\left.\begin{array}{l} \text{Pasa por } (4,5) \Rightarrow f(4) = 5 \Rightarrow 16a + 4b - 3 = 5 \Rightarrow 4a + b = 2 \\ \text{Mínimo en } x = 1 \implies f'(1) = 0 \implies 2a + b = 0 \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{c} a = 1 \\ b = -2 \end{array}}$$

Comprobamos que para esos valores de a y b, en efecto hay un mínimo en $x = 1$

$$f''(x) = 2ax = 2 \implies f''(1) = 2 > 0 \xrightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } x = 1 \checkmark$$

b) Para $a = 1$ y $b = -2 \implies f(x) = x^2 - 2x - 3$ & $g(x) = x - 3$. Hallamos los puntos de corte entre ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \implies x^2 - 2x - 3 = x - 3 \implies x^2 - 3x = 0 \implies x = \{0, 3\}$$

Por lo tanto tendremos un único recinto de integración $A_1 : (0, 3)$

$$A_1 = \int_0^3 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^3 \left[x^2 - 2x - 3 - (x - 3)\right] dx = \int_0^3 (x^2 - 3x)\, dx$$
$$= \left.\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(9 - \frac{27}{2}\right) - 0 = -\frac{9}{2}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{9}{2} = 4.5\ u^2$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0.4 \qquad \& \qquad P(A \cap B) = 0.21 \qquad \& \qquad P(A \mid B) = 0.6$$

a) Calcule $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ y $P(\overline{B} \mid A)$.

b) Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.21}{P(B)} = 0.6 \implies P(B) = 0.35$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.35 - 0.21 = 0.54$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.54 \implies \boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.46}$$

$$P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.4 - 0.21}{0.4} \implies \boxed{P(\overline{B} \mid A) = 0.475}$$

b) $\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.21 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.35 = 0.14 \end{array}\right\} \implies \left| \begin{array}{l} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}\right.$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

a) Calcule un intervalo con un 95 % de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

b) Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87 %?

(Galicia - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $n = 100 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{80}{100} = 0.8 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.2 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{100}} = 0.0784$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.7216; 0.8784)}$$

b) $X \equiv$ "Proporción de individuos satisfechos" $\longrightarrow X : \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \mathcal{N}(0.8, \underbrace{0.04}_{\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{100}}})$

$$P(X \geq 0.87) = P\left(Z \geq \frac{0.87 - 0.8}{0.04}\right) = P(Z \geq 1.75) = 1 - P(Z \leq 1.75)$$
$$= 1 - 0.9599 = 0.0401$$