MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2025
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. el sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.

a) (0.75 puntos) Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) (0.25 puntos) Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).

c) (1.5 puntos) Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$.

(Región de Murcia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) Sean las incógnitas definidas en el enunciado. Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x = my \\ y = 2z \\ mz + x + y = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - my = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + mz = 600 \end{cases} \Rightarrow A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & m & 600 \end{array}\right)$$

b) Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A

$$|A| = 3m + 2 = 0 \implies m = -2/3$$

- Si $m \neq -2/3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{\text{Th. Rouché}}$ Sistema Compatible Determinado (solución única), y como en el enunciado dicen que $m > 0$, estaremos siempre en este caso.

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & m & 600 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1+m & m & 600 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 + mF_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2+3m & 0 & 1200 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - \frac{1200m}{2+3m} = 0 \\ \Rightarrow \frac{1200}{2+3m} - 2z = 0 \\ \Rightarrow (2+3m)y = 1200 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1200m}{2+3m} \\ y = \frac{1200}{2+3m} \ , \ m > 0 \\ z = \frac{600}{2+3m} \end{array}}$$

c) Para $m = 2 \implies \boxed{x = 300 \text{ € Darío} \quad \& \quad y = 150 \text{ € Hugo} \quad \& \quad z = 75 \text{ € José}}$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1.25 puntos) Compruebe que las matriceas A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

b) (1.25 puntos) Resuelva la ecuación $A^\top \cdot X \cdot B = C$, donde $A^\top$ es la traspuesta de A.

(Región de Murcia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $|A| = 5 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1} \qquad \& \qquad A^{-1} = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

$|B| = 1 \neq 0 \implies \exists\, B^{-1} \qquad \& \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^\top \cdot X \cdot B = C \xrightarrow{A^\top = A} A \cdot X \cdot B = C \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

$$\implies X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Considere un triángulo rectángulo de catetos x e y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

a) (0.5 puntos) Demuestre que su área viene dada por la expresión

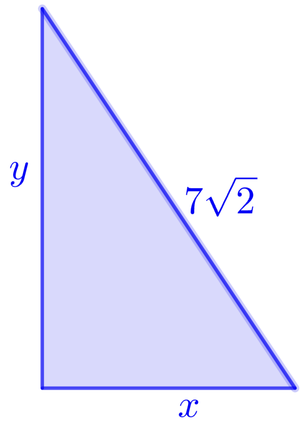
$$f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{98 - x^2}$$

b) (2 puntos) Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

(Región de Murcia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

$$\left.\begin{array}{l} (7\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{98 - x^2} \\ S(x,y) = \dfrac{1}{2} \cdot xy \end{array}\right\} \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{98 - x^2}$$



$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{98 - x^2} + x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{98 - x^2}} \right) = \frac{98 - x^2 - x^2}{2\sqrt{98 - x^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow 98 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow \cancel{x = -7} \text{ y } x = 7$$

	$(0,7)$	$\left(7, 7\sqrt{2}\right)$
Signo $S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La superficie del triángulo $S(x)$ es *creciente* en $(0,7)$ y *decreciente* en $\left(7, 7\sqrt{2}\right)$ y tiene un *máximo* en $x = 7\ cm \Longrightarrow y = 7\ cm$ y vale $S(7) = 24.5\ cm^2$.

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

> *Considere la función* $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.
>
> *a) (1.5 puntos) Calcule la integral indefinida* $\displaystyle\int f(x)\,dx$.
>
> *b) (1 punto) Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función* $f(x)$ *y el eje* OX *entre los valores* $x = 1$ *y* $x = 2$ *es* $\ln\left(\dfrac{27}{16}\right)$.
>
> *(Región de Murcia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)*

Solución.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \overset{\odot}{\Longrightarrow} du = \dfrac{-1}{x\cdot(x+1)}\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\}$$

$$= x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}\cdot(x+1)}\,dx = x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln(x+1) + C$$

$$= x\cdot\ln(x+1) - x\cdot\ln x + \ln(x+1) = (x+1)\cdot\ln(x+1) - x\cdot\ln x + C$$

$$\odot\ u = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x \implies du = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{-1}{x\cdot(x+1)}\,dx$$

b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ y el eje OX

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 \implies \frac{x+1}{x} = 1 \implies 1 = 0 \implies \nexists \text{ Solución}$$

Por lo tanto entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se define un único recinto de integración $A_1 : (1, 2)$.

$$A_1 = \int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = \Big(3\cdot\ln 3 - 2\cdot\ln 2\Big) - \Big(2\ln 2 - \cancelto{0}{\ln 1}\Big)$$

$$= 3\cdot\ln 3 - 4\cdot\ln 2 = \ln\left(3^3\right) - \ln\left(2^4\right) = \ln 27 - \ln 16 = \ln\left(\frac{27}{16}\right)$$

$$\text{Área} = |A_1| = \ln\left(\frac{27}{16}\right)\ u^2$$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Considere las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} x = 7 + 3\mu \\ y = -5 + \mu \\ z = 7 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Compruebe que se cruzan.

b) (1.5 puntos) Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.

c) (0.5 puntos) Calcule la distancia entre r y s.

(Región de Murcia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,5,0) \\ \vec{d_r} = (0,1,1) \end{cases} \qquad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(7,-5,7) \\ \vec{d_s} = (3,1,0) \end{cases} \quad \& \quad \overrightarrow{RS} = (6,-10,7)$$

a) $$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & -10 & 7 \end{vmatrix} = -57 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $$\vec{d_t} = \vec{d_r} \times \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,3,-3)$$

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} R(1,5,0) \\ \vec{d_r} = (0,1,1) \\ \vec{d_t} = (-1,3,-3) \end{cases} \implies \pi_1 = \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -6 \cdot (x-1) - (y-5) + z = 0 \implies \pi_1 \equiv 6x + y - z - 11 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} S(7,-5,7) \\ \vec{d_s} = (3,1,0) \\ \vec{d_t} = (-1,3,-3) \end{cases} \implies \pi_2 = \begin{vmatrix} x-7 & y+5 & z-7 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -3 \cdot (x-7) + 9 \cdot (y+5) + 10 \cdot (z-7) = 0 \implies \pi_2 \equiv 3x - 9y - 10z + 4 = 0$$

$$t = \pi_1 \cap \pi_2 \implies t \equiv \begin{cases} 6x + y - z - 11 = 0 \\ 3x - 9y - 10z + 4 = 0 \end{cases}$$

c) $$d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right]\right|}{\left|\vec{d_r} \times \vec{d_s}\right|} = \frac{\left|\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right]\right|}{\left|\vec{d_t}\right|} = \frac{|-57|}{|(-1,3,-3)|} = \frac{57}{\sqrt{19}} = 3\sqrt{19}\ u$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Considere los planos

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 0 \qquad \& \qquad \pi_2 \equiv x + y - z = 2$$

a) *(1 punto) Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan los planos π_1 y π_2.*

b) *(0.75 puntos) Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2.*

c) *(0.75 puntos) Calcule la proyección ortogonal de P en π_1.*

(Región de Murcia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $r = \pi_1 \cap \pi_2 \implies r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} R(1,1,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,2,2) \approx (0,1,1) \end{cases}$

$$\implies \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \ , \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) $¿P \in r? \implies \begin{cases} 1 - 2 + 3 \neq 0 \\ 1 + 2 - 3 \neq 2 \end{cases} \implies P \notin r$

Por lo tanto la recta s será la que pase por P y sea paralela a r.

$$s \equiv \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{d_s} = \vec{d_r} = (0,1,1) \end{cases} \implies \boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \mu \\ z = 3 + \mu \end{cases} \ , \ \mu \in \mathbb{R}}$$

c) $t \equiv \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{d_t} = \vec{n}_{\pi_1} = (1,-1,1) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases} \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$P' = t \cap \pi_1 \implies 1 + \alpha - (2 - \alpha) + 3 + \alpha = 0 \implies \alpha = -2/3 \implies \boxed{P'\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Considere dos urnas, U_1 y U_2, tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1, depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2. Calcule la probabilidad de que:

a) *(0.5 puntos) Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.*

b) *(0.5 puntos) Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.*

c) *(0.75 puntos) Salga una bola verde en U_2.*

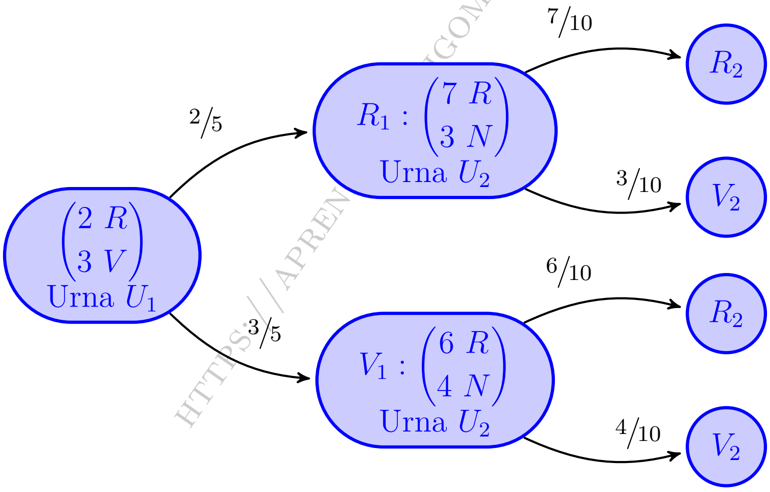
d) *(0.75 puntos) Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2.*

(Región de Murcia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Sacar una bola roja en la extracción } i\text{”}$$
$$V_i \equiv \text{“Sacar una bola verde en la extracción } i\text{”}$$



a) $P(R_2 \mid R_1) = \dfrac{7}{10} = 0.7$

b) $P(V_2 \mid R_1) = \dfrac{3}{10} = 0.3$

c) $P(V_2) = P\Big((R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap V_2)\Big) = P(R_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap V_2)$

$$= P(R_1) \cdot P(V_2 \mid R_1) + P(V_1) \cdot P(V_2 \mid V_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{9}{25} = 0.36$$

d) $P(R_1 \mid R_2) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1)}{1 - P(R_2)} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10}}{1 - 0.36} = 0.4375$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

El 2 % de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.

a) (1 punto) Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.

b) (1.5 puntos) Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

(Región de Murcia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de piezas en buen estado de un lote de 10" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.98)$

$E[X] = np = 10 \cdot 0.98 = 9.8 \quad \& \quad D[X] = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.98 \cdot 0.02} = 0.4427$

$$P(\overline{X} = 1) = P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0.98^9 \cdot 0.02^1 = 0.1667$$

b) $X \equiv$ "Nº de piezas en buen estado de un lote de 2000" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(2000, 0.98)$

$$X : \mathcal{B}(2000, 0.98) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 2000 > 20 \checkmark \\ np = 1960 > 5 \checkmark \\ nq = 40 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(1960, 6.26)$$

$$P(\overline{X} < 50) = P(X \geq 1950) = P(Y \geq 1949.5) = P\left(Z \geq \frac{1949.5 - 1960}{6.26}\right)$$
$$= P(Z \geq -1.68) = P(Z \leq 1.68) = 0.9535$$