MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2025
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2025 (Extraordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social Rettwit *se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso "El P25 necesita enfriarse para poder usarlo".*
Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber @solo_reviews *ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso.*
Un total de 288 *compradores verificados responden en el hilo, de los cuales* 20 *reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de* @solo_reviews*, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.*
Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en Rettwit*:*
"En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2 % *de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata. #PearSupport #P25"*

a) (1.25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de @solo_reviews *hubiese sido superior o igual a* 11*.*

b) (1.25 puntos) Obtenga un intervalo del 99 % *de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de* @solo_reviews*. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de* Pear*?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción Unica)

Solución.

a) $X \equiv$ "Nº de smartphnes defectuosos reportados" $\longrightarrow X : \mathcal{B}(288, 0.02)$

$$X.\mathcal{B}(288, 0.02) \implies \left\{ \begin{array}{c} n = 288 > 20 \checkmark \\ np = 5.76 > 5 \checkmark \\ nq = 282.24 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = (5.75, 2.376)$$

$$P(X \geq 11) = P(Y \geq 10.5) = P\left(Z \geq \frac{10.8 - 5.75}{2.376}\right) = P(Z \geq 2.13)$$
$$= 1 - P(Z \leq 2.13) = 1 - 0.9834 = 0.0166$$

b) $n = 288 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{20}{288} = 0.0694 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.9306 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.99$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.0694 \cdot 0.9306}{288}} = 0.0386$$

$$I.C._{99\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(p) = (0.0308; 0.1080)}$$

Dado que se estima que la muestra de *@solo_reviews* es una m.a.s., la afirmación de la empresa *Pear* de que el número de dispositivos defectuosos es del 2 % es cuestionable, pues con un nivel de confianza del 99 %, podemos afirmar que el porcentaje de smartphones defectuosos se encuentra entre el 3.08 % y el 10.8 %.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Se considera el sitema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ (a+1)x+az=5 \end{cases}$$

a) *(1.25 puntos) Discuta el sistema en función delos valores del parámetro real a.*

b) *(1.25 puntos) Resuelva el sistema para $a=2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial: $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & a & 5 \end{array}\right)$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a+2 = 0 \implies a = 2$$

- Si $a \neq 2$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=2$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\; F_2 - 2F_1 \;\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x+\lambda+1-3\lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3\lambda - z = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1-3\lambda+\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Sean x e y dos números reales tales que:

$$x \geq -6 \quad \& \quad y \geq 0 \quad \& \quad -x+y \leq 8 \quad \& \quad x+4y \leq 12 \quad \& \quad x+y \leq 6$$

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las resticciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (0.5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

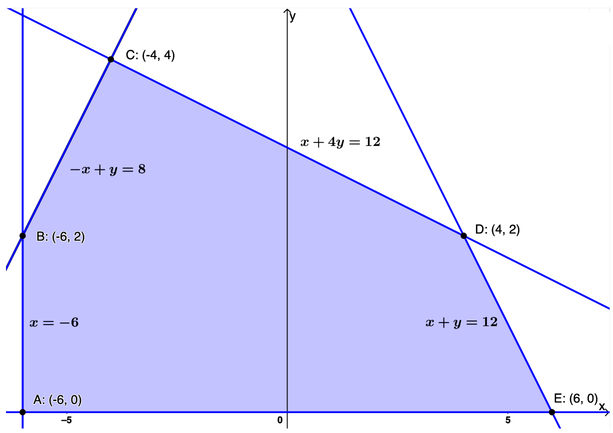
$$\begin{cases} 1 \;\; -x+y \leq 8 & \rightarrow (0,8) \quad \& \quad (-8,0) \\ 2 \;\; x+4y \leq 12 & \rightarrow (0,3) \quad \& \quad (12,0) \\ 3 \;\; x+y \leq 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ 4 \;\; x \geq -6 & \rightarrow (-6,0) \\ y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = 2y - 3x$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	-6	0	18
B	-6	2	22
C	-4	4	20
D	4	2	-8
E	6	0	-18



El *máximo* de $f(x,y)$ es de 22 y se produce en el punto $B : (-6, 2)$.

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x \cdot (x^2 + a)$$

donde $a > 0$ es un parámetro real.

a) *(1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de $f(x)$, $F(x)$, cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.*

b) *(0.5 puntos) Para $a = {}^3\!/_2$, obtenga el área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.*

c) *(1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ sea 1.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int x \cdot (x^2 + a)\,dx = \int \left(x^3 + ax\right) dx = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{ax^2}{2} + C$

$F(0) = 0 \implies \boxed{C = 0}$

$F(1) = 1 \implies \dfrac{1}{4} + \dfrac{a}{2} + 0 = 1 \implies \boxed{a = {}^3\!/_2}$

b) Hallamos los puntos de corte de la función $f(x)$ y el eje de abscisas para $a = {}^3\!/_2$

$$f(x) = x \cdot \left(x^2 + \frac{3}{2}\right) \implies \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + \dfrac{3}{2} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$$

Luego, entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$, se define un único recinto de integración $A_1 : (0, 2)$.

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^2 = (4 + 3) - 0 = 7$$

$$\text{Área} = |A_1| = 7\ u^2$$

c) $f(x) = x \cdot (x^2 + a) = x^3 + ax \qquad \& \qquad f'(x) = 3x^2 + a$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 1 \implies 3 + a = 1 \implies \boxed{a = -2}$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & , \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9} & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$.

b) (0.5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

c) (1.5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $\text{Dom}(f_1) = (-\infty, 0)$, pues el denominador se anula en $2x - 1 = 0 \implies x = 1/2$ que no pertecene a la rama.

$\text{Dom}(f_2) = [0, 3) \cup (3, +\infty)$, pues el denominador se anula en $x^2 - 9 = 0 \implies x = -3$, que no pertenece a la rama y $x = 3$ que si pertenece.

$\text{Dom}(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$

b) `Continuidad en` $x = 0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2x-1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9} = 0$
- $f(0) = 0$

$$\implies \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \\ \implies f(x) \text{ es continua en } x = 0 \end{cases}$$

c)

- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = 3$
  - $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \left[\dfrac{117}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \left[\dfrac{117}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \left[\dfrac{117}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$
- `A. Horizontal:` $\underset{x\to-\infty}{\exists\, A.V.}$ en $y = 1/2$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{-2x-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$
- `A. Oblicua:` $\underset{x\to+\infty}{\exists\, A.O.}$ en $y = 4x + 1$
  - $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+x^2}{x^3-9x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{4}{1} = 4$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9} - 4x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{4x^3} + x^2 - \cancel{4x^3} + 36x}{x^2-9}$

    $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+36x}{x^2-9} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0.4 \quad \& \quad P(\overline{B}) = 0.7 \quad \& \quad P(C) = 0.5 \quad \& \quad P(A \cap B \mid C) = 0.2$$

donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B.

a) *(0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.*

b) *(0.75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\overline{B}$ ocurran simultáneamente.*

c) *(1 punto) Obtenga $P(C \mid A \cap B)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción A)

Solución.

a) A y B indep. $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot \left[1 - P(\overline{B})\right] = 0.4 \cdot (1 - 0.7) = 0.12$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.12 \Longrightarrow \boxed{P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.88}$

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.12 \Longrightarrow \boxed{P(A \cap \overline{B}) = 0.28}$

c) $P(A \cap B \mid C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{0.5} = 0.2 \Longrightarrow P(A \cap B \cap C) = 0.1$

$P(C \mid A \cap B) = \dfrac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \dfrac{0.1}{0.12} \Longrightarrow \boxed{P(C \mid A \cap B) = 0.8333}$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- *El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del* 5 %.
- *Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el* 90 % *de las veces.*
- *Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el* 10 % *de las veces.*

a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.

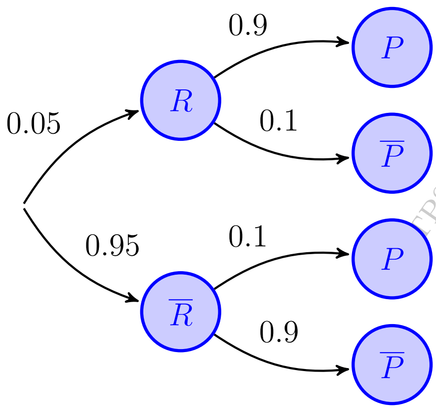
b) (1.25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva, ¿Cuál es la probabilidad de que tanga insuficiencia renal?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2025 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$R \equiv$ "El gato tiene insuficienci renal"
$P \equiv$ "La prueba da positivo en insuficiencia renal"



a) $$P(\overline{P}) = P\Big((R \cap \overline{P}) \cup (\overline{R} \cap \overline{P})\Big)$$
$$= P(R \cap \overline{P}) + P(\overline{R} \cap \overline{P})$$
$$= P(R) \cdot P(\overline{P} \mid R) + P(\overline{R}) \cdot P(\overline{P} \mid \overline{R})$$
$$= 0.05 \cdot 0.1 + 0.95 \cdot 0.9 = 0.86$$

b) $$P(R \mid P) = \frac{P(R \cap P)}{P(P)} = \frac{P(R) \cdot P(P \mid R)}{1 - P(\overline{P})}$$
$$= \frac{0.05 \cdot 0.9}{1 - 0.86} = 0.3214$$