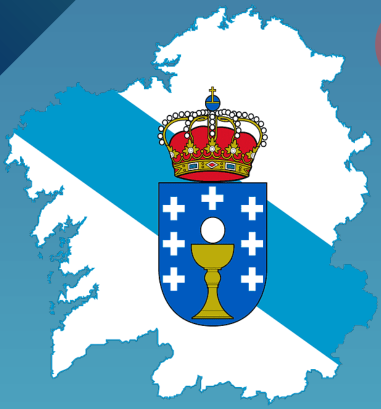
MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2025

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Según los datos recogidos por la dirección de la cafetería de una facultad, el 65 % de sus clientes son estudiantes, el 25 % personal de la universidad y el 10 % restante son personas ajenas a la universidad. Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos. Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90 % de los clientes son atendidos antes de 8 minutos. Por los datos recogidos, han llegado a la conclusión de que el 30 % de los estudiantes efectúan los pagos en efectivo, siendo este porcentaje igual al 70 % para el personal de la universidad, mientras que el 80 % de los pagos realizados por personas ajenas a la universidad se hacen en efectivo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?

b) Calcular la probabiliddad de que un pago en esta cafetería no haya sido realizado en efectivo.

c) Si un pago se hizo en efectivo, ¿qué es más probable, que haya sido realizado por estudiantes o por personal de la universidad?

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción Única)

Solución.

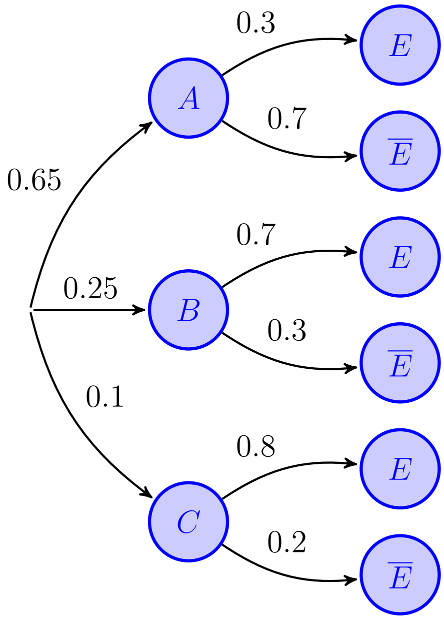
a) $X \equiv$ "'Tiempo de espera para ser atendido (min)" $\longrightarrow X : \mathcal{N}(5, \sigma)$

$$P(X \leq 8) = P\left(\frac{8-5}{\sigma}\right) = 0.90 \xRightarrow{\text{Tabla}} \frac{8-5}{\sigma} = 1.2817 \implies \sigma = 2.34$$

$$P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-5}{2.34}\right) = P(Z \leq -0.43) = P(Z \geq 0.43) = 1 - P(Z \leq 0.43)$$
$$= 1 - 0.6664 = 0.3336$$

b) Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El cliente es un estudiante"
$B \equiv$ "El cliente es personal de la universidad"
$C \equiv$ "El cliente es ajeno a la universidad"
$E \equiv$ "El cliente paga en efectivo"



b) $P(\overline{E}) = P\big((A\cap\overline{E})\cup(B\cap\overline{E})\cup(C\cap\overline{E})\big)$

$= P(A\cap\overline{E}) + P(B\cap\overline{E}) + P(C\cap\overline{E})$

$= P(A)\cdot P(\overline{E}\mid A) + P(B)\cdot P(\overline{E}\mid B)$

$+ P(C)\cdot P(\overline{E}\mid C) = 0.65\cdot 0.7$

$+ 0.25\cdot 0.3 + 0.1\cdot 0.2 = 0.55$

$\implies P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0.55 = 0.45$

c) $$P(A\mid E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)\cdot P(E\mid A)}{P(E)} = \frac{0.65\cdot 0.3}{0.45} = 0.4333$$

$$P(B\mid E) = \frac{P(B\cap E)}{P(E)} = \frac{P(B)\cdot P(E\mid B)}{P(E)} = \frac{0.25\cdot 0.7}{0.45} = 0.3889$$

Luego si se sabe que ha pagado en efectivo es más probable que sea estudiante que sea personal de la universidad.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

a) *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, *halle* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *tales que* $A^2 + \alpha A + \beta I = \mathcal{O}$, *donde* I *y* $\mathcal{O}$ *son las matrices identidad y cero, respectivamente.*

b) *Calcule la matriz cuadrada* X *tal que* $XA = B$, *si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *¿Son iguales* XA *y* AX*?*

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $A^2 + \alpha A + \beta I = \mathcal{O} \implies \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & 5\alpha \\ 2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta + 14 & 5\alpha + 5 \\ 2\alpha + 2 & -\alpha + \beta + 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 2\alpha + \beta + 14 = 0 \xRightarrow{\alpha=-1} -2 + \beta + 14 = 0 \implies \boxed{\beta = -12} \\ 5\alpha + 5 = 0 \implies \boxed{\alpha = -1} \\ 2\alpha + 2 = 0 \xRightarrow{\alpha=-1} -2 + 2 = 0 \checkmark \\ -\alpha + \beta + 11 = 0 \xRightarrow[\beta=-12]{\alpha=-1} 1 - 12 + 11 = 0 \checkmark \end{cases}$$

b) $XA = B \Rightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} \cdot X = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$ & $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad XA = B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies XA \neq AX$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ mx+y+z=1 \end{cases}$$

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -m^3 + 3m - 2 \overset{\odot}{=} -(m-1)^2 \cdot (m+2) = 0 \implies m = \{-2, 1\}$$

$$\odot \quad \begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array} \qquad -m^2 - m + 2 = 0 \implies m = \{-2, 1\}$$

- Si $m \neq \{-2, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $\text{ran}(A) = 1 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & , \textit{ si } x \leq 1 \\ x^2 - m & , \textit{ si } x > 1 \end{cases}$$

se pide responder las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en $x = 1$?

b) ¿Para qué valores de k y m es f derivable en $x = 1$?

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a)
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (kx^2 + 2x) = k + 2$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - m) = 1 - m$
- $f(1) = k + 2$

$f(x)$ continua en $x = 1 \iff \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow k + 2 = 1 - m \implies \boxed{k + m = -1}$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2kx + 2 & , \text{ si } x < 1 \\ 2x & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$

- $f'[1^-] = \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2kx + 2) = 2k + 2$
- $f'[1^+] = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 2x = 2$

$f(x)$ es derivable en $x = 1 \iff f(x)$ es continua y $f'[1^-] = f'[1^+]$

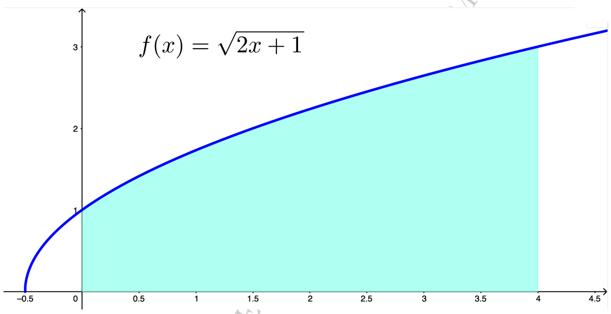
$$\implies \begin{cases} k + m = -1 \xRightarrow{k=0} \boxed{m = -1} \\ 2k + 2 = 2 \implies \boxed{k = 0} \end{cases}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

> *Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 4$. Luego, calcule su área.*
>
> *(Galicia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)*

Solución.

- $\text{Dom}(f) = \{2x + 1 \geq 0\} \implies \text{Dom}(f) = [-1/2, +\infty)$
- $f(0) = 1 \implies (0, 1) \qquad \& \qquad f(x) = \sqrt{2x+1} = 0 \implies (-1/2, 0)$
- $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0 \implies f(x)$ es creciente en su dominio
- $f''(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}} < 0 \implies f(x)$ es cóncava $(\cap)$ en su dominio



Por lo tanto entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$ se define un único recinto de integración $A_1 : (0, 4)$ y el area será positiva pues la función está por encima del eje OX.

$$\text{Área} = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_0^4 (2x+1)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \underbrace{2}_{u'}\underbrace{(2x+1)^{1/2}}_{u^{1/2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x+1)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}\Bigg]_0^4 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \simeq 8.6667\ u^2$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Determine el valor que debe tomar k para que los planos

$$\pi_1 \equiv kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \qquad \& \qquad \pi_2 \equiv 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de k que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

- $\pi_1 \parallel \pi_2 \implies \dfrac{k}{3} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1/4}{1} \neq \dfrac{2}{3} \implies 4k = 3 \implies \boxed{k = 3/4}$
- $\pi_1 \perp \pi_2 \implies \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \implies \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = (k, 1, 1/4) \cdot (3, 4, 1) = 3k + 4 + \dfrac{1}{4} = 0$

  $\implies \boxed{k = -17/12}$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Considere el punto $P(0,1,0)$ y la recta $r \equiv (x,y,z) = (2,0,3) + \lambda \cdot (1,2,3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Determine la ecuación continua de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto P.

b) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

(Galicia - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $s \equiv \begin{cases} P(0,1,0) \\ \vec{d}_s = \vec{d}_r = (1,2,3) \end{cases} \implies s \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$

b) $\pi \equiv \begin{cases} P(0,1,0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d}_r = (1,2,3) \end{cases} \implies \pi \equiv x+2y+3z+D \xrightarrow{P\in\pi} 2+D = 0 \implies D = -2$

$\implies \boxed{\pi \equiv x + 2y + 3z - 2 = 0}$
