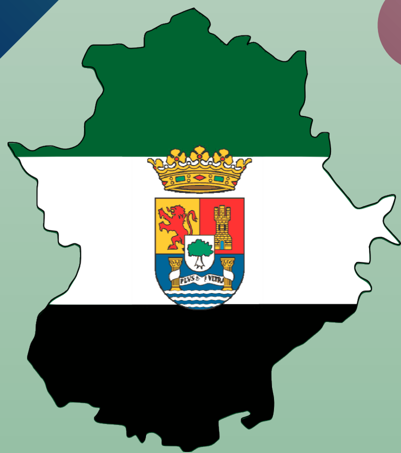
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2025
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025 (Ordinario)

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones donde $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky + z = 2 + k \\ 2x - y - kz = 1 - k \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro k.

b) (1 punto) Resolver para el caso $k = 1$.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2025) - Opción A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 2+k \\ 2 & -1 & -k & 1-k \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -k^2 + k = k \cdot (1-k) = 0 \implies k = \{0, 1\}$$

- Si $k \neq \{0,1\}$ $|A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $k = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 - \lambda + \lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 3\lambda = -6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } m \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2 - A = B$.

b) (0.75 puntos) Calcular m para que la matriz $A + B - I$ tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.

c) (0.75 puntos) Para $m = 2$ obtener la inversa de la matriz $A + B - I$.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2025) - Opción B)

Solución.

a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} m^2 - m & -1 \\ 0 & m^2 + m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{B} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - m = 0 \implies m = \{0, 1\} \\ -1 = -1 \checkmark \\ 0 = 0 \checkmark \\ m^2 + m = 2 \Rightarrow \begin{cases} \overset{m=0}{\Longrightarrow} \cancel{0 = 2} \\ \overset{m=1}{\Longrightarrow} 1 + 1 = 2 \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto el valor que verifica $A^2 - A = B$ es $m = 1$.

b) $A + B - I = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - 1 & 0 \\ 0 & 1 - m \end{pmatrix}$

$|A + B - I| = -(m - 1)^2 \neq 0 \implies m \neq 1 \implies \exists (A + B - I)^{-1} \ \forall m \neq 1$

c) Para $m = 2 \Rightarrow A + B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(A + B - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A + B - I}$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = (x-1)\cdot e^{-x}$

a) (1 punto) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$*.*

b) (1 punto) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de $f(x)$*.*

c) (0.5 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ *para* $x = 1$*.*

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2025) - Opción A)

Solución.

a) $f'(x) = e^{-x} - (x-1)\cdot e^{-x} = (2-x)\cdot e^{-x} = 0 \implies \begin{cases} 2-x=0 \implies x=2 \\ e^{-x}=0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 2)$ y *decreciente* en $(2, \infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $(2, {}^1/_{e^2})$.

b) $f''(x) = -e^{-x} - (2-x)\cdot e^{-x} = (x-3)\cdot e^{-x} = 0 \implies \begin{cases} x-3=0 \implies x=3 \\ e^{-x}=0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

La función $f(x)$ es *cóncava* ($\cap$) en $(-\infty, 3)$ y *convexa* ($\cup$) en $(3, +\infty)$, y tiene un *punto de inflexión* en $(3, {}^2/_{e^3})$.

c) $x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = 0 \implies (x_0, y_0) = (1, 0)$

$$m_r = f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{e}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 0 = \frac{1}{e}\cdot(x-1) \implies \boxed{r \equiv y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Dadas las funciones $f(x) = 2$ y $g(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

a) (1.25 puntos) Calcular $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

b) (1.25 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2025) - Opción B)

Solución.

a) $$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{2}{x^3+x^2-2x}\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1/3}{x+2}\,dx + \int \frac{2/3}{x-1}\,dx$$
$$= -\ln|x| + \frac{1}{3}\cdot\ln|x+2| + \frac{2}{3}\cdot\ln|x-1| + C$$

$(*)$ $x^3+x^2-2x = x\cdot(x+2)\cdot(x-1)$

$$\frac{2}{\cancel{x^3+x^2-2x}} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{\cancel{x^3+x^2-2x}}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \langle\, x=0 \,\rangle & 2=-2A & \Rightarrow A=-1 \\ \langle\, x=-2 \,\rangle & 2=3C & \Rightarrow C=2/3 \\ \langle\, x=1 \,\rangle & 2=6B & \Rightarrow B=1/3 \end{cases}$$

b) Cortes de $g(x)$ y el eje $OX \implies g(x) = x^3 - x^2 - 2x = 0 \implies x = \{-2,0,1\}$, lo que define dos recintos de integración $A_1 : (-2,0)$ y $A_2 : (0,1)$

$$G(x) = \int g(x)\,dx = \int \left(x^3+x^2-2x\right)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + C$$
$$A_1 = \int_{-2}^{0} g(x)\,dx = G(0) - G(-2) = 0 - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) = \frac{8}{3}$$
$$A_2 = \int_{0}^{1} g(x)\,dx = G(1) - G(0) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - 0 = -\frac{5}{12}$$
$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \simeq 3.08\ u^2$$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

a) *(1 punto) Comprobar que el plano* $\pi \equiv x + y - z = 3$ *y la recta* $r \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ *no se cortan.*

b) *(1 punto) Calcular la distancia entre el plano* π *y la recta* r *del apartado anterior.*

c) *(0.5 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta* r *y que pase por el punto* $(0,1,-1)$.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2025) - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,1,-1) \\ \vec{d_r} = (3,-1,2) \end{cases} \qquad \& \qquad \vec{n}_\pi = (1,1,-1)$$

a) $\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = (3,-1,2)\cdot(1,1,-1) = 3-1-2 = 0 \implies \vec{d_r} \perp \vec{n}_\pi$ y como $0+1+1 \neq 3$ $\implies \mathbb{R} \notin \pi \implies r \parallel \pi$.

b) $d(r,\pi) = d(R,\pi) = \dfrac{|0+1+1-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ u$

c) $\pi' \perp \pi \implies \pi' \equiv 3x - y + 2z + D = 0 \xrightarrow{(0,1,-1)\in\pi'} 0 - 1 - 2 + D = 0 \implies D = 3$

$\implies \boxed{\pi' \equiv 3x - y + 2z + 3 = 0}$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Dados los puntos $A(1,0,2)$, $B(1,m,6)$, $C(2,1,4)$ y $D(4,3,2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.

b) (0.5 puntos) Obtener la ecuación general del plano ACD.

c) (1 punto) Para $m=2$, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2025) - Opción B)

Solución.

a) $\overrightarrow{AB}=(0,m,4) \quad \& \quad \overrightarrow{AC}=(1,1,2) \quad \& \quad \overrightarrow{AD}=(3,3,0)$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix} 0 & m & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=6m=0 \implies \boxed{m=0}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} A(1,0,2) \\ \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(1,1,2) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AD}=(3,3,0) \end{cases} \Rightarrow \pi = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -6\cdot(x-1)+6y=0$$

$$\implies \boxed{\pi' \equiv x-y-1=0}$$

c) Para $m=2 \implies \overrightarrow{AB}=(0,2,4) \quad \& \quad \overrightarrow{AC}=(1,1,2)$

$$\vec{w}\perp ABC \implies \vec{w}=k\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=k\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=k\cdot(0,4,-2)$$

$$|\vec{w}|=|k|\cdot\sqrt{20}=4 \implies |k|=\frac{4}{\sqrt{20}} \implies k=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \implies \begin{cases} \vec{w}_1=\left(0,-\frac{8\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \\ \vec{w}_2=\left(0,\frac{8\sqrt{5}}{5},-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \end{cases}$$

$$\text{Área}_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot|(0,4,-2)|=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

a) (1 punto) Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm.

b) (1 punto) ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67 % de los estudiantes miden más que él?

c) (0.5 puntos) Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

(Extremadura - Matemáticas II - Junio 2025) - Opción Única)

Solución.

$$X \equiv \text{“Altura de los estudiantesde 2º Bachillerato (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(174, 12)$$

a) $$P(162 \leq X \leq 186) = P\left(\frac{162-174}{12} \leq Z \leq \frac{186-174}{12}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1)$$
$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1)$$
$$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 2 \cdot P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1$$
$$= 0.6826 \implies 68.26\,\% \text{ de alumnos}$$

b) $$P(X \geq a) = P\left(Z6 \geq \frac{a-174}{12}\right) = P\left(X \leq -\frac{a-174}{12}\right) = 0.67$$
$$\implies -\frac{a-174}{12} = 0.44 \implies \boxed{a = 168.72}$$

c) $$P(X \geq 170) = P\left(Z \geq \frac{170-174}{12}\right) = P(Z \geq -0.33) = P(Z \leq 0.33) = 0.6293$$
$\implies$ $0.6293 \cdot 1000 = 629.3$, luego 629 estudiantes superarán los 170 cm.