MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2025
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025 (Ordinario)

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Halla los valores del parámetro a par los cuales la matriz A tiene inversa.*

b) *(1 punto) Considra $a = -3$. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A.*

c) *(0.5 puntos) Considera $a = -3$. Halla, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $AX = B$.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a & a+2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= [C_1 = C_1 + C_3] = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ -a & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot [(a+2)^2 + a] = a \cdot (a^2 + 5a + 4)$$

$$= a \cdot (a+1) \cdot (a+4) \neq 0 \implies a \neq \{-4, -1, 0\} \implies \exists A^{-1} \; \forall a \neq \{-4, -1, 0\}$$

b) $$\text{Si } a = -3 \implies A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad |A| = -3 \cdot (-3+1) \cdot (-3+4) = 6$$

$$\text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}}$$

c) $$AX = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ (a^2-2)y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) (1.5 puntos) Halla los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

b) (1 punto) Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a^2-2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - a^2 - 2a = a\cdot(a-2)\cdot(a+1) = 0 \implies a = \{-1, 0, 2\}$$

- Si $a \neq \{-1,0,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -2y + 2\lambda = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -x + \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} & , \textit{si } x \neq 2 \\ e^k & , \textit{si } x = 2 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$ un parámetro a determinar.

a) *(0.75 puntos) Determina el valor del parámetro k para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$.*

b) *(1 punto) Si existen, halla las asíntotas de $f(x)$ y especifica de qué tipo son.*

c) *(0.75 puntos) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) `Continuidad en` $x = 2$:

- $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{2x} = \frac{12}{4} = 3$
- $f(2) = e^k$

$f(x)$ es continua en $x = 2 \iff \displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \implies 3 = e^k \implies \boxed{k = \ln 3}$

b)
- `Dominio:` $x^2 - 4 = 2 \implies x = -2 \quad \& \quad \cancel{x=2} \notin$ rama $x \neq 2$
- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = -2$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \left[\frac{-16}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x) = \left[\frac{-16}{0^+}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x) = \left[\frac{-16}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \mp\infty \implies \nexists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$
- `A. Oblicua:` $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.O.}$ en $y = x$
  - $m = \displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3-8}{x^3-4x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$
  - $n = \displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^3-8}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - 8 - \cancel{x^3} + 4x}{x^2-4}$

    $= \displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \frac{4x-8}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$

c) $x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = \dfrac{-7}{-3} \implies (x_0, y_0) = (1, 7/3)$

$f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4} \implies f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2-4) - (x^3-8) \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{5}{9}$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - \frac{7}{3} = \frac{5}{9}(x-1) \implies \boxed{r \equiv y = \frac{5}{9}x + \frac{16}{9}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Considera la siguiente función: $f(x) = (x^2-2)\cdot e^{2x}$.

a) *(0.5 puntos) Halla los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas OX y los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de ordenadas OY.*

b) *(1 punto) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

c) *(1 punto) Calcula el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.*

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a)
- `Corte con` OX: $f(x) = (x-2)\cdot e^{2x} = 0 \implies \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2} \\ e^{2x} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$
- `Corte con` OY: $x = 0 \implies y = -2 \implies (0,-2)$

b) $f'(x) = 2x\cdot e^{2x} + (x^2-2)\cdot 2\cdot e^{2x} = (2x^2+2x-4)\cdot e^{2x} = 0 \implies x = \{-2, 1\}$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ y *decreciente* en $(-2,1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1,-e^2)$ y un *máximo relativo* en $(-2, {}^2/_{e^4})$.

c) Entre las rectas $x = -2$ y $x = 1$, teniendo en cuenta los puntos de corte con el eje OX, se definen dos recintos de integración $A_1 : (-2, -\sqrt{2})$ y $A_2 : (-\sqrt{2}, 1)$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^2-2)\cdot e^{2x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{x^2-2}{2}\cdot e^{2x} - \int \cancel{2}x \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\cdot e^{2x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{x^2-2}{2}\cdot e^{2x} - \frac{x}{2}\cdot e^{2x} + \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{x^2-2}{2}\cdot e^{2x} - \frac{x}{2}\cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}\cdot\left(2x^2 - 2x - 3\right) + C$$

$$A_1 = \int_{-2}^{-\sqrt{2}} f(x)\,dx = F(-\sqrt{2}) - F(-2) \simeq 0.0566 - 0.0412 = 0.0154$$

$$A_2 = \int_{-\sqrt{2}}^{1} = F(1) - F(-\sqrt{2}) = -5.5418 - 0.0566 = -5.5984$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = 0.0154 + 5.5984 = 5.6238\ u^2$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ *y el punto* $P(1,1,1)$.

a) *(1 punto) Determina los puntos de* r *que están a una distancia de* $\sqrt{14}$ *unidades de* P.

b) *(0.75 puntos) Obtén la ecuación del plano que contiene a* r *y* P.

c) *(0.75 puntos) Calcula la distancia entre* r *y* P.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2025

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,-3,-2) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2,4,2) \approx (1,2,1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Sea $Q(\lambda, -3+2\lambda, -2+\lambda)$ un punto cualquiera de la recta r.

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(\lambda - 1, -4 + 2\lambda, -3 + \lambda)| = \sqrt{(\lambda-1)^2 + (-4+2\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 16 + 4\lambda^2 - 16\lambda + 9 + \lambda^2 - 6\lambda} = \sqrt{6\lambda^2 - 24\lambda + 26} = \sqrt{14}$$
$$\implies 6\lambda^2 - 24\lambda + 26 = 14 \implies \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = 2 \pm \sqrt{2}$$
$$\implies \begin{cases} \lambda = 2 - \sqrt{2} \implies \boxed{Q_1(2-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})} \\ \lambda = 2 + \sqrt{2} \implies \boxed{Q_2(2+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \sqrt{2})} \end{cases}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (1,2,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{RP} = (1,4,3) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$\implies 2\cdot(x-1) - 2\cdot(y-1) + 2\cdot(z-1) = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x - y + z - 1 = 0}$$

c) $$d(r,P) = \frac{\left|\vec{d_r} \times \overrightarrow{RP}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}\right|}{|(1,2,1)|} = \frac{|(2,-2,2)|}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}\ u$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

En un colegio se ofrecen solo atletismo y baloncesto como actividades deportivas extraescolares. En base a los datos de otros años, los docentes determinan que la probabilidad de que un alumno se matricule en atletismo es $P(A) = 0.40$; y que la probabilidad de que un estudiante se matricule en baloncesto es $P(B) = 0.65$. Además, solo un 10 % del alumnado no se matricula en ningún deporte.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un alumno se matricule en los dos deportes.

b) (1.5 puntos) Calcula las siguientes probabilidades: $P(A \mid B)$, $P(B \mid A)$ y $P(A \mid \overline{B})$, donde $\overline{B}$ representa el suceso contrario a B.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El alumno se matricula en atletismo”}$$
$$B \equiv \text{“El alumno se matricula en baloncesto”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.4 \qquad \& \qquad P(B) = 0.65 \qquad \& \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1$$

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.1 \implies P(A \cup B) = 0.9$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.65 - 0.9 \implies \boxed{P(A \cap B) = 0.15}$$

b) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.15}{0.65} \implies \boxed{P(A \mid B) = 0.2308}$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.4} \implies \boxed{P(B \mid A) = 0.375}$$

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.4 - 0.15}{1 - 0.65} \implies \boxed{P(A \mid \overline{B}) = 0.7143}$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Solo dos sedes de una empresa fabrican el mismo modelo de aspiradora. La sede A suministra el 60 % de la producción total. Un 0.15 % de las aspiradoras fabricadas en la sede A y un 0.1 % de las aspiradoras fabricadas en la sede B falla durante el primer año.

a) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que una aspiradora fabricada en la sede B no falle durante el primer año.

b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que una aspiradora elegida al azar falle durante el primer año.

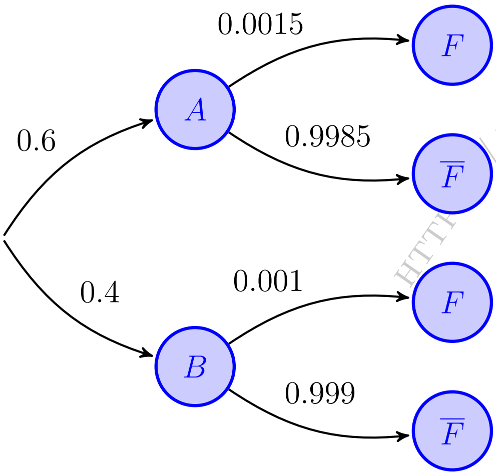
c) (1 punto) Si una aspiradora elegida al azar no falla durante el primer año, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la sede A.

(Cantabria - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“La aspiradora ha sido fabricada en la sede } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“La aspiradora ha sido fabricada en la sede } B\text{”}$$
$$F \equiv \text{“La aspiradora falla durante el primer año”}$$



a) $P(\overline{F} \mid B) = 1 - 0.001 = 0.999$

b) $$\begin{aligned} P(F) &= P\big((A\cap F)\cup(B\cap F)\big) \\ &= P(A\cap F) + P(B\cap F) \\ &= P(A)\cdot P(F\mid A) + P(B)\cdot P(F\mid B) \\ &= 0.6\cdot 0.0015 + 0.4\cdot 0.001 = 1.28\cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} P(A\mid \overline{F}) &= \frac{P(A\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(A)\cdot P(\overline{F}\mid A)}{1-P(F)} \\ &= \frac{0.6\cdot 0.9985}{1-0.00128} = 0.5998 \end{aligned}$$