MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2025

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025 (Ordinario)
Bloque Análisis

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, *utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/l), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:*

- *Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.*
- *Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.*

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & , \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} & , \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

a) *(0.5 puntos) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta.*

b) *(0.75 puntos) La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar* Metabolix *es mayor que -0.5 $(mg/l)/h$.*

c) *(0.75 puntos) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averigüar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración.*

d) *(0.5 puntos) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento?*

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2025 - Bloque Análisis)

Solución.

a)
- Si $x \neq 2$ la función es continua pues $f_1(x)$ es un polinomio y en la segunda rama $\text{Dom}(f_2) = 5x - 1 > 0 \implies x > 1/5$.
- Si $x = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - 6x + 11\right) = 3^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} = \dfrac{9}{\sqrt{10-1}} = 3$

- $f(2) = \dfrac{9}{\sqrt{10-1}} = 3$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \implies f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en su dominio $[0, +\infty)$.

b) $f'(x) = \dfrac{-9 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}}{5x-1} = -\dfrac{45}{\sqrt{(5x-1)^3}}$

$f'(3) = -\dfrac{45}{\sqrt{(15-1)^3}} \simeq -0.4295 > -0.5\ (mg/l)/h$

c) $f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 = 0 \implies \cancel{x=3} & \text{, si } 0 \leq x < 2 \\ -\dfrac{45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} < 0 & \text{, si } x > 2 \end{cases}$

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La concentración residual $f(x)$ es *decreciente* en su dominio $(0, +\infty)$ y debido a que $f(0) = 11$, la concentración residual máxima del medicamento en sangre se dará en el instante inicial y valdrá 11 mg/l.

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = \left[\frac{9}{\infty}\right] = 0\ mg/l.$

Con el paso del tiempo la concentración en sangre del medicamento tiende a reducirse hasta desaparecer.

Bloque Algebra

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Dada la matriz $M \in M_{2\times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, *con* $a \in \mathbb{R}$.

a) *(1 punto) Para cualquier valor del parámetro* a*: comprobar que* M *es invertible y dar la expresión de* M^{-1}.

b) *(1.5 puntos) Para* $a = -1$*, calcula el valor de la matriz* X *que satisface la ecuación* $M \cdot A = B - M \cdot X$*, siendo:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A - Bloque Algebra)

Solución.

a) $|M| = 2-a+a-3 = -1 \neq 0 \implies \exists M^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} \implies \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} a-2 & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$

b) $M \cdot A = B - M \cdot X \implies M \cdot X = B - M \cdot A \implies \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \cdot X = M^{-1} \cdot (B - M \cdot A)$

$\implies X = M^{-1} \cdot B - \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \cdot A \implies \boxed{X = M^{-1} \cdot B - A}$

Para $a = -1 \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$X = M^{-1} \cdot B - A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, *con* $k \in \mathbb{R}$.

a) (1.25 puntos) Estudiar el rango de A *según los valores del parámetro* k.

b) (1.25 puntos) Para $k = -1$, *comprobar que* $A^2 = 2A - I$, *donde* I *denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que* $A^4 = 4A - 3I$.

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B - Bloque Algebra)

Solución.

a) $|A| = 5k^2 + 16k + 12 = 0 \implies k = \{-2, -6/5\}$

- Si $k \neq \{-2, -6/5\} \implies |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3$
- Si $k = \{-2, -6/5\} \implies |A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

  $\implies \operatorname{ran}(A) = 2$

b) Para $k = -1 \implies A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ & $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \quad q.e.d.$$

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 + I^2 - 4A = 4 \cdot (2A - I) + I - 4A = 8A - 4I + I - 4A$$
$$= 4A - 3I \quad q.e.d.$$

Bloque Geometría

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2,-1,1) \quad \& \quad r_1 \equiv \begin{cases} 4x+3y-3z=2 \\ 2x-3y-6z=1 \end{cases} \quad \& \quad r_2 \equiv \frac{x+3}{2} = 2-y = \frac{z+4}{3}$$

a) *(0.25 puntos) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$.*

b) *(1 punto) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2.*

c) *(1.25 puntos) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2.*

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A - Bloque Geometría)

Solución.

$$r_1 \equiv \begin{cases} P(2,-1,1) \\ \vec{d}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = (-27,18,-18) \approx (3,-2,2) \end{cases} \Longrightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3} \Longrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} Q(-3,2,-4) \\ \vec{d}_{r_2} = (2,-1,3) \end{cases} \Longrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -3+2\mu \\ y = 2-\mu \\ z = -4+3\mu \end{cases}$$

a) $\begin{cases} 4\cdot 2-3-3=2\ \checkmark \\ 2\cdot 2+3-6=1 \checkmark \end{cases} \Longrightarrow P(2,-1,1) \in r_1$

$\dfrac{2+3}{2} \neq 2+1 \neq \dfrac{1+4}{3} \Longrightarrow P(2,-1,1) \notin r_2$

b) $R = r_1 \cap r_2 \Longrightarrow \begin{cases} 2+3\lambda = -3+2\mu \xrightarrow[\mu=1]{\lambda=-1} -1+2 = 2-1\ \checkmark \\ \left. \begin{array}{l} -1-2\lambda = 2-\mu \\ 1+2\lambda = -4+3\mu \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow R(-1,1,-1)$

$d(P,R) = \left|\overrightarrow{PR}\right| = |(-3,2,-2)| = \sqrt{9+4+4} \Longrightarrow \boxed{d(P,R) = \sqrt{17}\ u}$

c) $\cos\left(\widehat{r_1,r_2}\right) = \dfrac{\left|\vec{d}_{r_1} \cdot \vec{d}_{r_2}\right|}{\left|\vec{d}_{r_1}\right| \cdot \left|\vec{d}_{r_2}\right|} = \dfrac{|(3,-2,2)\cdot(2,-1,3)|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{|6+2+6|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{238}}{17}$

$\Longrightarrow \boxed{\left(\widehat{r_1,r_2}\right) = 24.84°}$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2) \quad \& \quad \pi \equiv -x+2y+z+1=0 \quad \& \quad r \equiv \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r.

b) (1.5 puntos) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π.

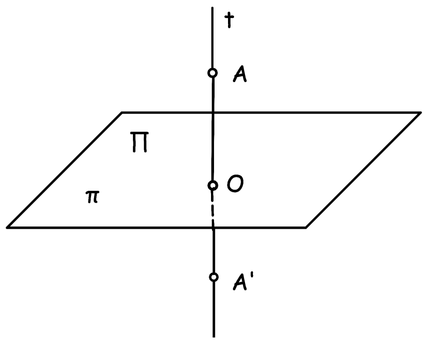
(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B - Bloque Geometría)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(-7,-5,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (12,8,4) \approx (3,2,1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x=-7+3\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

a) $\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = (1,2,3)\cdot(-1,2,1) = 6 \neq 0 \xRightarrow{r\cap\pi} r$ y π se cortan en un punto.

b) $t \equiv \begin{cases} A(1,0,2) \\ \vec{d_t} = \vec{n}\pi = (-1,2,1) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$



$O = t\cap\pi \implies -(1-\lambda)+4\lambda+2+\lambda+1=0$

$\implies \lambda = -1/3 \implies O = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$O = \dfrac{A+A'}{2} \Rightarrow A' = 2O-A = 2\cdot\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)-(1,0,2)$

$\implies \boxed{A'\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)}$

Bloque Probabilidad

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:
En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer una bola al azar de una urna compuesta por 2 holas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

a) (0.5 puntos) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.

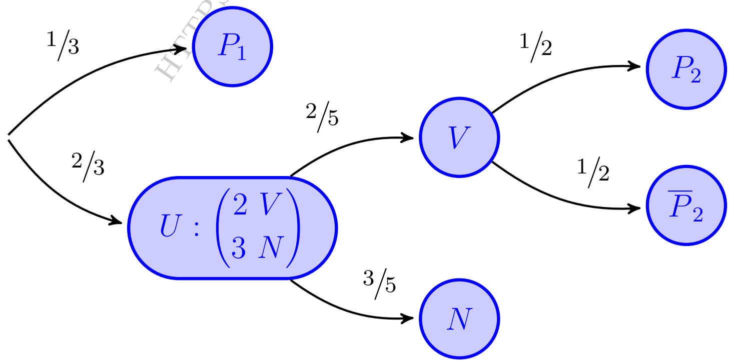
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.

c) (1 punto) Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A - Bloque Probabilidad)

Solución.

a) $P_1 \equiv$ "Elige una caja con premio en primera ronda"
$U \equiv$ "Elige una caja vacía en primera ronda (sacará bola de la urna)"
$V \equiv$ "Saca bola verde de la urna (puede volver a elegir caja)"
$N \equiv$ "Elige bola negra (se acaba el juego)"
$P_2 \equiv$ "Elige una caja con premio en segunda ronda"
$\overline{P}_2 \equiv$ "Elige una caja vacía en segunda ronda (termina el juego)"
$P \equiv$ "Elige una caja con premio"



b) $P(P) = P(P_1 \cup P_2) = P(P_1) + P(P_2) = P(P_1) + P(U \cap V \cap P_2)$

$$= P(P_1) + P(U) \cdot P(V \mid U) \cdot P(P_2 \mid (U \cap V)) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{15} \simeq 0.4667$$

c) $$P(V \mid P) = \frac{P(V \cap P)}{P(P)} = \frac{P(U) \cdot P(V \mid U) \cdot P(P_2 \mid (U \cap V))}{P(P)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{15}}$$

$$= \frac{2}{7} \simeq 0.2857$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22°C con desviación típica de 5°C. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18°C y 25°C. Si se superan los 30°C, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15°C esxiste riesgo de cambios meterorólgicos bruscos previstos para ese día.
Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

a) (0.75 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?

b) (0.75 puntos) ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesto de insolación?

c) (1 punto) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarios en el mes de agosto y, de ellos, un 5 % realiza senderismo. ¿Cuántos visitantes se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

(Islas Canarias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B - Bloque Probabilidad)

Solución.

$$X \equiv \text{“Temperatura diurna en el Parque Nacional (°}C\text{)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(22, 5)$$

a) $$P(18 \leq X \leq 25) = P\left(\frac{18-22}{5} \leq Z \leq \frac{25-22}{5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.6)$$
$$= P(Z \leq 0.6) - P(Z \leq -0.8) = P(Z \leq 0.6) - P(Z \geq 0.8)$$
$$= P(Z \leq 0.6) - [1 - P(Z \leq 0.8)] = 0.7257 - (1 - 0.7881) = 0.5138$$

b) $$P(X \geq 30) = P\left(Z \geq \frac{30-22}{5}\right) = P(Z \geq 1.6) = 1 - P(Z \leq 1.6) = 1 - 0.9452$$
$$= 0.0548 \xRightarrow{\text{31 días}} 31 \cdot 0.0548 = 1.6988 \text{ días con riesgo de insolación}$$

c) $$P(X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{15-22}{5}\right) = P(Z \leq -1.4) = P(Z \geq 1.4) = 1 - P(Z \leq 1.4)$$
$$= 1 - 0.9192 = 0.0808 \xRightarrow[\text{5 \% senderistas}]{\text{11000 visitantes}} 11000 \cdot 0.05 \cdot 0.0808 = 44.44 \text{ visit./dia}$$
$$44.44 \ \frac{\text{visitantes}}{\text{día}} \cdot 31 \text{ días} \simeq 1378$$

Por lo tanto 1378 visitantes se verán afectados por cambios meteorológicos bruscos en el mes de agosto.