MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2025
- Ordinario -

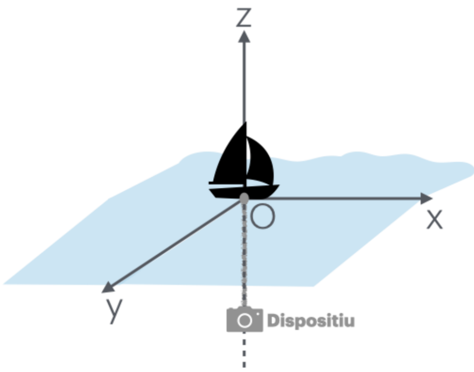
https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas.
El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos a una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.



a) *(1 punto) Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 m (vean la figura). A coontinuación, este se desplazó 37 m sobre la recta*

$$\begin{cases} x = 0 \\ 35y + 12z = -3780 \end{cases}$$

hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto en el que se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O como el centro de referencia (el origen de coordenadas).

b) *(0.5 puntos) Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?*

c) *(1 punto) Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitorizando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se deplaza en línea recta sobre la trayectoria*

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$$

Si dicho objeto no cambia su trayectoria, ¿podría chocar contra el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción Única)

Solución.

a) Sea $O(0,0,0)$ la posición del barco y $A(0,0,-315)$ la del dispositivo situado en la vertical del barco y a 315 m de profundidad. Desplazaremoos el dispositivo 37 m en la dirección de la recta r hasta alcanzar el punto B a 350 m de profundidad.

$$r \equiv \begin{cases} A(0,0,-315) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 12 \end{vmatrix} = (0,-12,35) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = -12\lambda \\ z = -315 + 35\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$B(0, -12\lambda, -315 + 35\lambda)$

$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(0, -12\lambda, 35\lambda)| = \sqrt{0 + 144\lambda^2 + 1225\lambda^2} = 37$

$$\implies 1369\lambda^2 = 1369 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \Rightarrow \boxed{B(0,12,-350)} \\ \lambda = 1 \Rightarrow \cancel{B(0,-12,-280)} \text{ profundidad incorrecta} \end{cases}$$

b) Para mantenerse a 350 m de profundidad el dispositivo debe moverse sobre el plano $\pi \equiv z = -350$.

c) Tenemos que ver si la trayectoria s del pez interseca el plano $\pi \equiv z = -350$ sobre el que se mueve el dispositivo. Para ello metemos las ecuaciones de la recta s en el plano π y vemos si tiene solución:

$$-380+10\lambda = -350 \implies \lambda = 3 \implies \begin{cases} x = 5 + 4 \cdot 3 \\ y = 10 + 3 \\ z = -380 + 10 \cdot 3 \end{cases} \implies \boxed{P(17,13,-350)}$$

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren de una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg) y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

$$\begin{aligned} &\textit{Producto 1: } 2x + y - z = 40 \text{ €},\\ &\textit{Producto 2: } x - y + 2z = 90 \text{ €},\\ &\textit{Producto 3: } x + 2y = 70 \text{ €},\\ &\textit{Producto 4: } x - y + z = 50 \text{ €}. \end{aligned}$$

a) (0.5 puntos) Describe qué significa la ecuación del producto 1.

b) (2 puntos) Con los datos disponibles, ¿es posible calcular el precio por kg de cada materia prima? Es decir, ¿calcular x, y, z? Justifica tu respuesta.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) La primera ecuación $2x+y-z=40 \implies 2x+y=z+40$ implica que si compramos 2 kg de madera y 1 de hierro y devolvemos 1 de plástico nos costará 40 €.

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones para ver si tiene solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 40 \\ 1 & -1 & 2 & 90 \\ 1 & 2 & 0 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 50 \end{array}\right) \sim [F_3 \leftrightarrow F_1] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 70 \\ 2 & 1 & -1 & 40 \\ 1 & -1 & 2 & 90 \\ 1 & -1 & 1 & 50 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 70 \\ 0 & -3 & -1 & -100 \\ 0 & -3 & 2 & 20 \\ 0 & -3 & 1 & -20 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 70 \\ 0 & -3 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 3 & 120 \\ 0 & 0 & 2 & 80 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow x + 2 \cdot 20 = 70 \\ \Rightarrow -3y - 40 = -100 \\ \Rightarrow 3z = 120 \\ \Rightarrow 2z = 80 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{c} x = 30 \\ y = 20 \\ z = 40 \end{array}}$$

Por lo tanto el sistema tiene solución única y los precios de los materiales son: 30 €/kg la madera, 20 €/kg el hierro y 40 €/kg el plástico.

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3.

a) (1 punto) Sabiendo que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en función de las matrices I y B.

b) (1.5 puntos) Sabiendo que A y su inversa A^{-1} son tales que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB + I = A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $AB + I = A \implies I = A - AB \implies I = A \cdot (I - B) \implies \boxed{A^{-1} = I - B}$

b) $AB+I = A \implies AB = A-I \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot B = A^{-1} \cdot (A-I) \implies B = A^{-1} \cdot (A-I)$

$$\Rightarrow B = I - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

$|B| = 1 \neq 0 \implies \exists B^{-1}$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) a lo largo de un tramo de 500 metros es $A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200$, donde $x \in [0, 500]$ representa la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

a) (1.5 puntos) Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado.
Indicación: *se puede utilizar el Teorema de Bolzano.*

b) (1 punto) Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

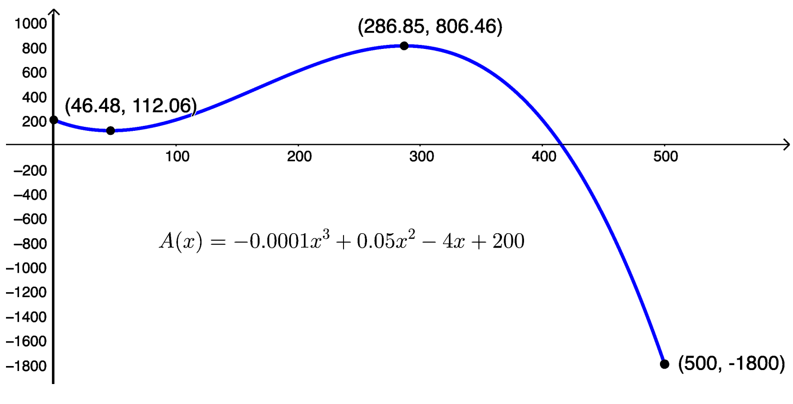
a) Utilizaremos el Th. de Bolzano para demostrar que en el intervalo $(0, 500)$ existe al menos una raíz de la funcion altitud $A(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x) \text{ es continua en } [0,500] \\ A(0) = 200 > 0 \\ A(500) = -1800 < 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Th. Bolzano}} \left\{\begin{array}{l} \exists \text{ al menos un punto } c \in (0,500) \\ \quad \text{tal que } A(c) = 0 \quad q.e.d. \end{array}\right.$$

b) $A'(x) = -0.0003x^2 + 0.1x - 4 = 0 \implies x = \{46.48, 286.85\}$

	$(0, 46.48)$	$(46.48, 286.85)$	$(286.85, 500)$
Signo $A'(x)$	$-$	$+$	$-$
$A(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La altitud $A(x)$ es *decreciente* en $(0, 46.48) \cup (286.85, 500)$ y *creciente* en $(46.48, 286.85)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(46.48, 112.06)$ y un *máximo relativo* en $(286.85, 806, 46)$. Además como hemos visto en el apartado anterior, $A(0) = 200$ y $A(500) = -1800$. Por lo tanto podemos concluir que comienza el trayecto a una altitud de 200 m, baja hasta 112.06 m cuando ha recorrido 46.48 m, momento en que vuelve a subir hasta llegar a una altitud de 806.46 m cuando llevaba recorrido 286.85 m y vuelve a bajar hasta una altitud mínima de -1800 m al final del trayecto (500 m). Como podemos observar hay un único punto x en donde la altitud es 0 y podemos afirmar que ese punto se encuentra en el intervalo $(286.85, 500)$.



Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(2x)$$

a) *(1 punto) Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.*

b) *(1.5 puntos) Calcula el área comprendida entre $f(x)$,el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 5$.*

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a)
- `Dominio:` $\mathrm{Dom}(f) = \{2x > 0 \cap x \neq 0\} \implies \mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+})\frac{1}{x} \cdot \ln(2x) = [\infty \cdot (-\infty)] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(2x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{1} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Por lo tanto la función $f(x)$ tiene una A. Vertical en $x = 0^+$ y una A. Horizontal cuando $x \to +\infty$ en $y = 0$.

b) Hallamos los cortes de $f(x)$ y el eje $OX \implies f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(2x) = 0 \implies x = 1/2$, que entre las rectas dadas define un único recinto de integración $A_1 : (1/2, 5)$.

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(2x)}_{u}\, dx = \frac{1}{2} \cdot [\ln(2x)]^2 + C$$

$$A_1 = \int_{1/2}^{5} f(x)\, dx = F(5) - F(1/2) = \frac{\ln^2 10}{2} - 0 = \frac{\ln^2 10}{2}$$

$$\text{Área} = |A_1| = \frac{\ln^2 10}{2} \simeq 2.6509\ u^2$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0.0005*. Sabiendo que la probabilidad que la prueba dé positivo cuando la efermedad está presente es de* 99 %*, y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del* 99 %*, responde:*

a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?

b) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

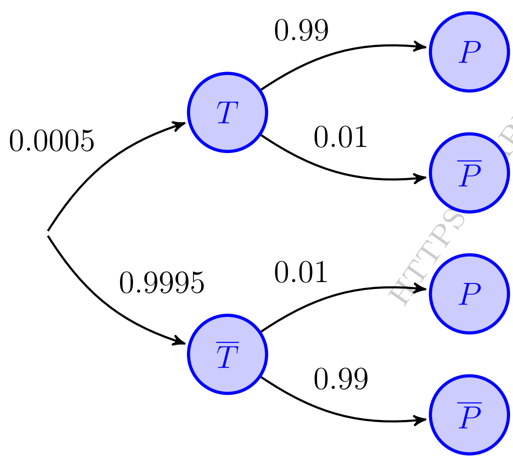
Solución.

Sean los sucesos:

$$T \equiv \text{‘Èl paciente tiene tuberculosis”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo en tuberculosis”}$$

Del enunciado tenemos que:

$$P(T) = 0.0005 \quad \& \qquad P(P \mid T) = 0.99 \quad \& \quad P(\overline{P} \mid \overline{T}) = 0.99$$



a) $P(P \mid \overline{T}) = 1 - P(\overline{P} \mid \overline{T}) = 1 - 0.99 = 0.01$

b) $$\begin{aligned} P(P) &= P\big((T \cap P) \cup (\overline{T} \cap P)\big) \\ &= P(T \cap P) + P(\overline{T} \cap P) \\ &= P(T) \cdot P(P \mid T) + P(\overline{T}) \cdot P(P \mid \overline{T}) \\ &= 0.0005 \cdot 0.99 + 0.9995 \cdot 0.01 = 0.0105 \end{aligned}$$

$$P(T \mid \overline{P}) = \frac{P(T \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{P(T) \cdot P(\overline{P} \mid T)}{1 - P(P)} = \frac{0.0005 \cdot 0.01}{1 - 0.0105} = 0$$

La probabilidad es prácticamente nula, luego el test es muy fiable.

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

En una universidad española, el 55 % del alumnado son mujeres y el 45 % son hombres. En esta universidad, el 13 % de las mujeres estudian una carrera STEM, mientras que el 37 % de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

a) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?

b) (1 punto) Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) (0.75 puntos) Sabiendo que el estudiante seleccionado NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

(Islas Baleares - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

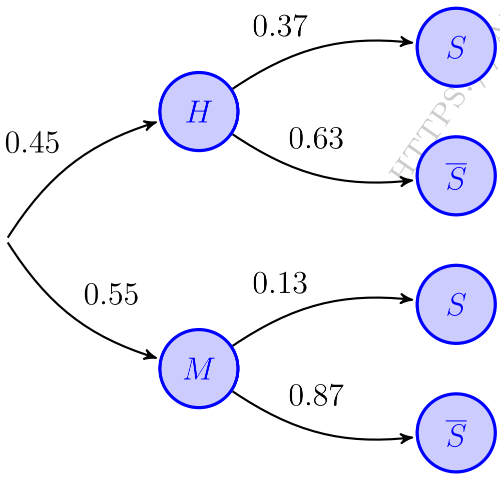
Sean los sucesos:

$H \equiv$ "El alumno es hombre" $\qquad$ $M \equiv$ "El alumno es mujer"

$S \equiv$ "El alumno estudia una carrera SETEM"

Del enunciado tenemos:

$$P(H) = 0.45 \quad \& \quad P(M) = 0.55 \quad \& \quad P(S \mid H) = 0.37 \quad \& \quad P(S \mid M) = 0.13$$



a) $$\begin{aligned} P(S) &= P\big((H \cap S) \cup (M \cap S)\big) \\ &= P(H \cap S) + P(M \cap S) \\ &= P(H) \cdot P(S \mid H) + P(M) \cdot P(S \mid M) \\ &= 0.45 \cdot 0.37 + 0.55 \cdot 0.13 = 0.238 \end{aligned}$$

b) $$P(M \mid S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M) \cdot P(S \mid M)}{P(S)} = \frac{0.55 \cdot 0.13}{0.238} = 0.3004$$

c) $$P(M \mid \overline{S}) = \frac{P(M \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(M) \cdot P(\overline{S} \mid M)}{1 - P(S)} = \frac{0.55 \cdot 0.87}{1 - 0.238} = 0.6279$$