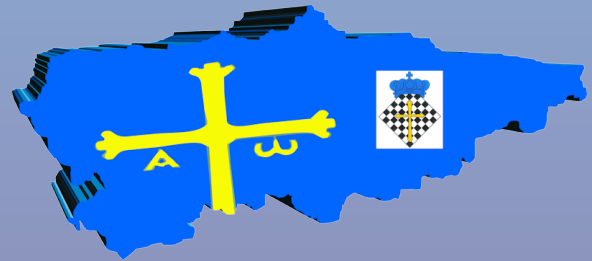


MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2025

- Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Junio 2025 (Ordinario)

Ejercicio 1A (2.5 puntos)

Un turista recorre el Principado de Asturias pasando x días en la zona del oriente, y días en la zona centro y z días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 en hospedaje y 40 en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

- a) (0.75 puntos) Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 para alimentación y 225 para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
- b) (1 punto) En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.
- c) (0.75 puntos) Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

658714776

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

- a) Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Nº de días en la zona de oriente"

$y \equiv$ "Nº de días en la zona centro"

$z \equiv$ "Nº de días en la zona de occidente"

	Zona oriental	Zona centro	Zona occidental	Presupuesto
Gasto de hospedaje (€/día)	30	40	30	290
Gasto alimentación (€/día)	25	20	40	290
Gasto varios (€/día)	25	25	25	225

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 30x + 40y + 30z = 290 \\ 25x + 20y + 40z = 290 \\ 25x + 25y + 25z = 225 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x + 4y + 3z = 29 \\ 5x + 4y + 8z = 58 \end{cases} \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 3 & 29 \\ 5 & 4 & 8 & 58 \end{array} \right)$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 3 & 4 & 3 & | & 29 \\ 5 & 4 & 8 & | & 58 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + 2 + 5 = 9 \\ y = 2 \\ 3z = 15 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{matrix}}$$

Por lo tanto podrá pasar 2 días en la zona de oriente, 2 en la zona centro y 5 en la zona de occidente.

c) En el caso de no visitar la zona del oriente el problema queda:

$$\begin{cases} 40y + 30z = 290 \\ 20y + 40z = 290 \\ 25y + 25z = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 9 \\ 4y + 3z = 29 \\ 4y + 8z = 58 \end{cases} \Rightarrow A/A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 9 \\ 4 & 3 & | & 29 \\ 4 & 8 & | & 58 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 9 \\ 4 & 3 & | & 29 \\ 4 & 8 & | & 58 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 9 \\ 0 & -1 & | & -7 \\ 0 & 4 & | & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_3 + 4F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 9 \\ 0 & -1 & | & -7 \\ 0 & 0 & | & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}$$

El sistema es incompatible y por tanto no tiene solución, lo que significa que si no visita la zona de oriente no puede mantener dicha distribución del presupuesto

_____ o _____

Ejercicio 1B (2.5 puntos)

Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.
- b) (1 punto) Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1} .
- c) (0.5 puntos) Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $|B| = 1 \implies \exists B^{-1} \forall x \in \mathbb{R}$

b) Si $x = 0 \implies B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad \text{Adj } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{Adj } B^T \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $|AB| = |A| \cdot |B| = |A| \xrightarrow{|B|=1} |A| = |A| \forall x \in \mathbb{R}$

_____ o _____

Ejercicio 2A (2.5 puntos)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \text{ si } 0 \leq x < 4 \\ 3 - (x - 5)^2 & , \text{ si } 4 \leq x \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estudia si la función es continua en su dominio.
- b) (1 punto) Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.
- c) (0.5 puntos) Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

- a) ■ Si $x \neq 4 \implies f(x)$ es continua pues son polinomios

- Si $x = 4$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{2} = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} [3 - (x - 5)^2] = 2 \\ \bullet f(4) &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \implies f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en todo $[0, +\infty)$.

$$b) f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} > 0 & , \text{ si } 0 < x < 4 \\ -2 \cdot (x - 5) = 0 \implies x = 5 & , \text{ si } 4 < x \end{cases}$$

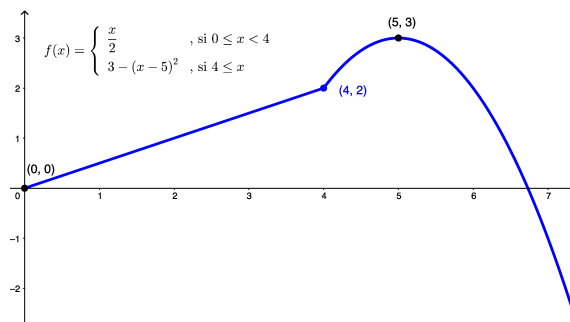
	$(0, 4)$	$(4, 5)$	$(5, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-
$f(x)$	Creciente ↗	Creciente ↗	Decreciente ↘

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0, 5)$ y *decreciente* en $(5, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo*, que es también *absoluto*, en $(5, 3)$.

- $f_1(x) = \frac{x}{2}$ es una recta creciente que pasa por $(0, 0)$ y $(4, 2)$.

- $f_2(x) = 3 - (x - 5)^2 = -x^2 + 10x - 22$ es una parábola *cóncava* (\cap) con vértice en $(5, 3)$.

- c) No se podrán alcanzar más de 3 millones de bacterias pues el máximo es $(5, 3)$.



Ejercicio 2B (2.5 puntos)

De dos funciones continuas se sabe que

$$f(1) = 1 \quad \& \quad f'(1) = 2 \quad \& \quad g(1) = -1 \quad \& \quad g'(1) = 2$$

Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

b) (1.25 puntos) Sabiendo que f tiene un máximo en $x = 3$ y que $k(x) = (x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

$$a) \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies h(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \implies h'(1) = \frac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2}{(-1)^2} = -4$$

$$b) \quad f(x) \text{ tiene un máximo en } x = 3 \implies f'(3) = 0 \quad \& \quad f''(3) < 0$$

$$k(x) = (x-2)^2 \cdot f(x) \text{ tiene un mínimo en } x = 3 \implies k'(3) = 0 \quad \& \quad k''(3) > 0$$

$$k'(x) = 2 \cdot (x-2) \cdot f(x) + (x-2)^2 \cdot f'(x)$$

$$\implies k'(3) = 2 \cdot (3-2) \cdot f(3) + (3-2)^2 \cdot f'(3) = 2f(3) = 0 \implies f(3) = 0$$

$$k''(x) = 2f(x) + (2x-4) \cdot f'(x) + 2 \cdot (x-2) \cdot f'(x) + (x-2)^2 \cdot f''(x)$$

$$k''(x) = 2 \cdot f(3) + 2 \cdot f'(3) + 2f'(3) + f''(3) < 0 \implies \text{máximo de } k(x) \text{ en } x = 3$$

Vemos que si $f(3) = 0 \implies k''(3) < 0$ lo que supone que $k(x)$ no puede tener un mínimo en $x = 3$, sino un máximo, por lo que el problema así enunciado no tendría solución.

_____ o _____

Ejercicio 3A (2.5 puntos)

Se sabe que la función $F(x)$ es una primitiva de la función

$$f(x) = x \cdot \cos(4x^2 - 1)$$

Se pide:

- a) (1.5 puntos) Calcular F sabiendo que $F(1/2) = 1$.
 b) (1 punto) Estudiar si F tiene un extremo en $x = 1/2$.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= \int f(x) dx = \int x \cdot \cos(4x^2 - 1) dx = \frac{1}{8} \int \underbrace{8x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos(4x^2 - 1)}_{\cos u} dx \\ &= \frac{1}{8} \cdot \sin(4x^2 - 1) + C \end{aligned}$$

$$F(1/2) = 1 \Rightarrow \frac{1}{8} \cdot \sin 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{8} \cdot \sin(4x^2 - 1) + 1$$

$$\text{b) } F'(1/2) = f(1/2) = \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{la función } F(x) \text{ no tiene un extremo en } x = 1/2.$$

Ejercicio 3B (2.5 puntos)

- a) (1.5 puntos) Se considera la función $f(x) = 4 \cdot \sin(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.
 b) (1 punto) Se considera una función $g(x)$ continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, calcula una expresión de g .

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

- a) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX

$$f(x) = 4 \cdot \sin(x - \pi) = 0 \Rightarrow x - \pi = k\pi \Rightarrow x = (k + 1) \cdot \pi, k = -1, 0, 1, \dots$$

Luego, entre las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ hay un único recinto de integración $A_1 : (0, \pi)$

$$A_1 = \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi 4 \cdot \sin(x - \pi) dx = -4 \cdot \cos(x - \pi) \Big|_0^\pi = -4 - (4) = -8$$

$$\text{Área} = |A_1| = 8$$

$$\text{b) } f(x) = \int g(x) dx \Rightarrow g(x) = f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$

Ejercicio 4A (2.5 puntos)

Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t) \quad \& \quad r_2(s) = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s)$$

Se pide:

- a) (1.25 puntos) Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan.
- b) (1.25 puntos) La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

$$r_1 \equiv \begin{cases} P(2, -1, 3) \\ \vec{d}_{r_1} = (1, -2, 2) \end{cases} \implies r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} Q(1, 4, 4) \\ \vec{d}_{r_2} = (2, -1, -2) \end{cases} \implies r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 4 - s \\ z = 4 - 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, 5, 1)$$

$$\text{a) } [\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \implies \text{los dos puentes se cruzan}$$

$$\vec{d}_t = \vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (6, 6, 3) \approx (2, 2, 1)$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2}|} = \frac{27}{|(6, 6, 3)|} = \frac{27}{\sqrt{81}} = 3 \text{ u}$$

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} P(2, -1, 3) \\ \vec{d}_{r_1} = (1, -2, 2) \\ \vec{d}_t = (2, 2, 1) \end{cases} \implies \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -6 \cdot (x-2) + 3 \cdot (y+1) + 6 \cdot (z-3) = 0 \implies \pi_1 \equiv 2x - y - 2z + 1 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} Q(1, 4, 4) \\ \vec{d}_{r_2} = (2, -1, -2) \\ \vec{d}_t = (2, 2, 1) \end{cases} \implies \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies 3 \cdot (x-1) - 6 \cdot (y-4) + 6 \cdot (z-4) = 0 \implies \pi_2 \equiv x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} T(1, 1, 1) \\ \vec{d}_t = (2, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$X = r_1 \cap r_t = \begin{cases} 2 + t = 1 + 2\lambda \\ -1 - 2t = 1 + 2\lambda \\ 3 + 2t = 1 + \lambda \end{cases} \xrightarrow[t=-1]{\lambda=0} \boxed{X(1, 1, 1)}$$

$$Y = r_2 \cap r_t = \begin{cases} 1 + 2s = 1 + 2\lambda \\ 4 - s = 1 + 2\lambda \\ 4 - 2s = 1 + \lambda \end{cases} \xrightarrow[s=1]{\lambda=1} \boxed{Y(3, 3, 2)}$$

————— o —————

Ejercicio 4B (2.5 puntos)

Se consideran los puntos siguientes: $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(3, 0, 5)$ y $D(0, -1, 2)$. Se pide:

- (1 punto) Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.
- (0.75 puntos) Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .
- (0.75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

$$a) \vec{AB} = (-3, -1, 1) \quad \& \quad \vec{AC} = (2, -2, 2) \quad \& \quad \vec{AD} = (-1, -3, -1)$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Rightarrow A, B, C \text{ y } D \text{ no son coplanarios}$$

$$b) \text{Área}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(0, 8, 8)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{128} = 4\sqrt{2} \, u^2$$

$$c) \text{Vol}_T = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} \cdot |-32| = \frac{16}{3} \simeq 5.33 \, u^3$$

————— o —————

Ejercicio 5A (2.5 puntos)

En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6 % de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95 % mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4 %.

- a) (1.25 puntos) Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?
- b) (1.25 puntos) Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

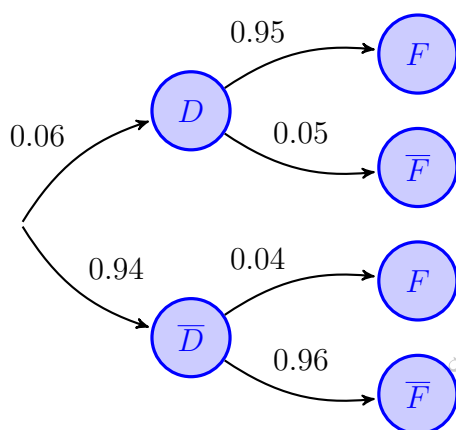
(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$D \equiv$ “La pieza es defectuosa”

$F \equiv$ “La pieza da fallo en el prueba/fallo”



a) $X \equiv$ “Nº piezas defectuosas” $\rightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.06)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.06^0 \cdot 0.94^{10} \\ = 1 - 0.5386 = 0.4614$$

b) $P(\bar{F}) = P((D \cap \bar{F}) \cup (\bar{D} \cap \bar{F}))$

$$= P(D \cap \bar{F}) + P(\bar{D} \cap \bar{F})$$
$$= P(D) \cdot P(\bar{F} | D) + P(\bar{D}) \cdot P(\bar{F} | \bar{D})$$
$$= 0.06 \cdot 0.05 + 0.94 \cdot 0.96 = 0.9054$$

Ejercicio 5B (2.5 puntos)

En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

- a) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?
- b) (0.75 puntos) Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?
- c) (1 punto) La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolución medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

(Asturias - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

$X \equiv$ “Tiempo de respuesta en Atención al Cliente (min)” $\longrightarrow X : \mathcal{N}(30, 5)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(25 \leq X \leq 30) &= P\left(\frac{25 - 30}{5} \leq Z \leq \frac{30 - 30}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0) \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 1)] \\ &= 0.5 - (1 - 0.8413) = 0.3413 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20 - 30}{5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$$

$$\text{c) } X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

$$P(X < 20) = P\left(Z < \frac{20 - \mu}{5}\right) = 0.7 \implies \frac{20 - \mu}{5} = 0.525 \implies \boxed{\mu = 17.375}$$

El tiempo de resolución medio se ha reducido considerablemente desde los 30 a los 17.375 minutos.

_____ o _____