MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2025

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Queremos encriptar el mensaje "HOLA" con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

- Paso 1: *Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra "HOLA") en un número según la tabla siguiente:*

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

- Paso 2: *Construimos una matriz columna, M_c, con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.*

- Paso 3: *Multiplicamos la matriz de encriptado,* $M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

  por la matriz M_c obtenida en el paso anterior.
  El resultado del último paso, M_{final}, es el mensaje encriptado.

a) *(0.5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje "HOLA" inicial.*

b) *(0.5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.*

c) *(1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado* $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$*, con el proceso descrito arriba ¿cuál es el mensaje original?*

d) *(0.5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_E, ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?*

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción Única)

Solución.

a) $M_c = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{final} = M_E \cdot M_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ -21 \\ -25 \\ -36 \end{pmatrix}$

b)
- *Paso 1:* Obtenemos la matriz columna M_c de la siguiente manera:
  $M_{final} = M_E \cdot M_c \implies M_E^{-1} \cdot M_{final} = \underbrace{M_E^{-1} \cdot M_E}_{I} \cdot M_c \implies M_c = M_E^{-1} \cdot M_{final}$
- *Paso 2:* Usando la tabla de encriptado obtenemos el mesaje original.

c) $|M_E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4+F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\text{Adj}\, M_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies M_E^{-1} = \frac{1}{|M_E|} \cdot \text{Adj}\, M_E^{\top} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_c = M_E^{-1} \cdot M_{final} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Mirando en la tabla obtenemos el mensaje desencriptado $\implies$ “BIEN”

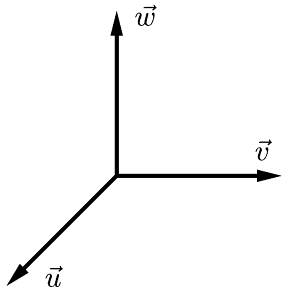
d) La matriz de encriptado M_E ha de ser cuadrada, con una dimensión igual a la longitud de la palabra a encriptar, e invertible, esto es, $|M_E| \neq 0$.

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ su producto vectorial. Se definen $a = (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{w}$, $b = \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ y $c = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Indica si a, b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.



$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \qquad \& \qquad \vec{w} \times \vec{u} = \vec{v}$$
$$\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{w} \qquad \& \qquad \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}$$

Hemos supuesto los vectores con el mismo módulo, lo que simplifica la comprensión del ejercicio. De no ser así tendríamos que decir por ejemplo que $\vec{u} \times \vec{v} = \dfrac{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}{|\vec{w}|} \cdot \vec{w}$

- $a = (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{w} = \vec{w} + \vec{w} = 2\vec{w} \implies \vec{a} \perp \vec{u}$ y $\vec{v}$ & $\vec{a} \parallel \vec{w}$
- $b = \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{w} \implies \vec{b} \perp \vec{u}$ y $\vec{v}$ & $\vec{b} \parallel \vec{w}$
- $c = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \implies c$ es un escalar

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

a) *(1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4,-3,0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x-2y+z-1=0$.*

b) *(1.5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto $Q(1,2,3)$ y a la recta*

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $s \equiv \begin{cases} P(4,-3,0) \\ \vec{d}_s = \vec{n}_\pi = (1,-2,1) \end{cases} \Longrightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$

b) $r \equiv \begin{cases} R(0,0,1) \\ \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2,1,-3) \end{cases}$

$$\pi' \equiv \begin{cases} R(0,0,1) \\ \vec{d}_r = (2,1,-3) \\ \overrightarrow{PQ} = (1,2,2) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x-7y+3\cdot(z-1)=0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\pi' \equiv 8x-7y+3z-3=0}$$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$, con x en el intervalo $[0,1]$, por otra función $g_m(x) = mx$ con m un parámetro en $\mathbb{R}$. Definimos como error de la aproximación la expresión

$$err(m) = \int_0^1 (f(x) - g_m(x))^2 \, dx$$

a) (1.5 puntos) Comprueba que $err(m) = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2} - 2m + \dfrac{m^2}{3}$ con $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor de $m \in \mathbb{R}$ que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) $$err(m) = \int_0^1 [f(x) - g_m(x)]^2 \, dx = \int_0^1 (e^x - mx)^2 \, dx = \int_0^1 \left(e^{2x} - 2mx \cdot e^x + m^2x^2\right) dx$$
$$= \int_0^1 e^{2x} \, dx - \int_0^1 2mx \cdot e^x \, dx + \int_0^1 m^2x^2 \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2mx \Rightarrow du = 2m \\ dv = e^x \, dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{e^u} \, dx - 2mx \cdot e^x \Big]_0^1 + \int_0^1 2me^x \, dx + \left.\frac{m^2x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - 2mx \cdot e^x + 2me^x + \left.\frac{m^2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{e^2}{2} - \cancel{2me} + \cancel{2me} + \frac{m^2}{3}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{2} + 2m\right) = \frac{e^2}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{1}{2} - 2m \quad q.e.d.$$

b) $$err'(m) = -2 + \frac{2m}{3} = 0 \implies m = 3$$
$$err''(m) = \frac{2}{3} \implies err''(3) = \frac{2}{3} > 0 \xrightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } x = 3$$

El *error mínimo* es de $err(3) = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2} - 6 + \dfrac{9}{3} = \dfrac{e^2 - 7}{2} \simeq 0.1945$ para $m = 3$.

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

a) *(1.25 puntos) Calcula*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos x}$$

b) *(1.25 puntos) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función*

$$f(x) = \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x, \; x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2x \cdot \cos(x^2)}{\operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2 \cdot \cos(x^2) + 4x^2 \cdot \operatorname{sen}(x^2)}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX:

$$f(x) = \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x = 0 \implies \begin{cases} \cos^2 x = 0 \implies x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \operatorname{sen} x = 0 \implies x = k\pi \end{cases}, \; k = 0, 1, \ldots$$

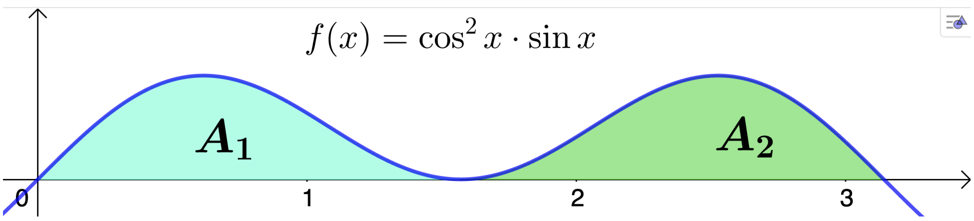
que, en el intervalo $[0, \pi]$ define dos recintos de integración $A_1 : (0, \pi/2)$ y $A_2 : (\pi/2, \pi)$.

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = \int \underbrace{\cos^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{u'}\, dx = -\frac{1}{3} \cdot \cos^3 x + K$$

$$A_1 = \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = F(\pi/2) - F(0) = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

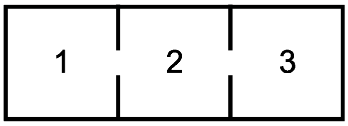
$$A_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\, dx = F(\pi) - F(\pi/2) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Área} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \simeq 0.667\; u^2$$



Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

En un juego se cuenta con el siguiente tablero, de manera que una ficha puede desplazarse de la casilla 1 a la 2; de la 2 puede desplazarse a las casillas 1 y 3; y de la casilla 3 a la casilla 2.



Para decidir el movimiento a realizar en cada turno, se lanza una moneda equilibrada (misma probabilidad de cara y cruz). Si sale cara, se intenta desplazar la ficha a la izquierda, si sale cruz, a la derecha. En caso de no poder realizar el desplazamiento correspondiente, la ficha se queda en la casilla en la que está durante ese turno.

a) *(0.5 puntos) Construye un árbol (o una tabla) que muestre las probabilidades de pasar de una casilla a otra en un turno.*

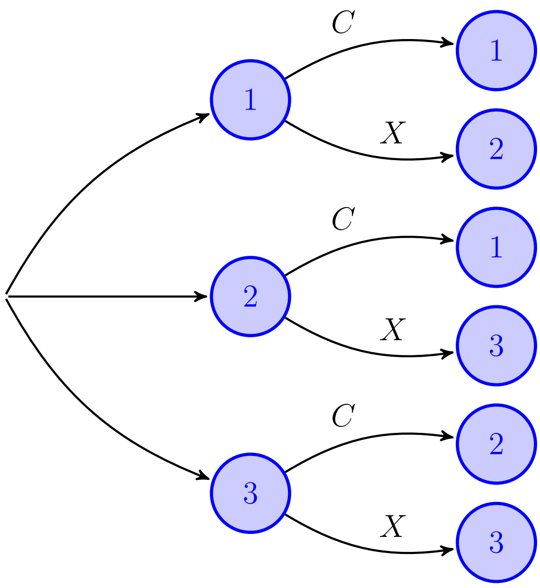
b) *(1 punto) Si la ficha se encuentra en la casilla 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tres turnos se encuentre de nuevo en la casilla 1?*

c) *(1 punto) Para comenzar el juego, se procede a un sorteo para ver dónde comienza la ficha. Si la probabilidad de empezar en la casilla 1 es $1/2$ y la probabilidad de empezar en la casilla 2 y en la 3 es de $1/4$ para cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas dos turnos después de empezar?*

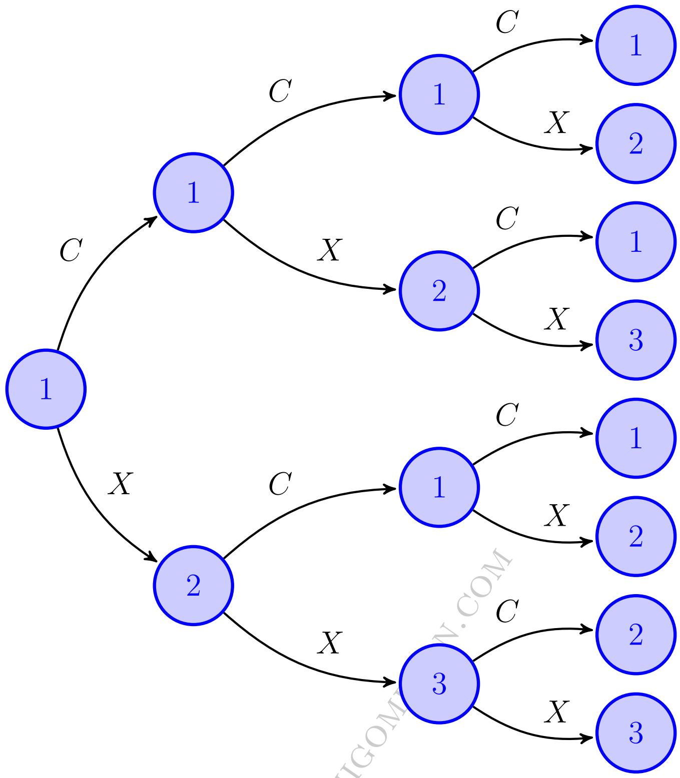
(Aragón - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) Llamamos a cada suceso por el número de la casilla en la que está. La probabilidad de cada deesplazamiento es $P(C) = P(X) = 1/2$ pues la moneda que determina el desplazamiento está equilibrada. Si sale C mueve a la izquierda, si sale X se mueve a la derecha y si no se puede mover se queda donde está.



b) Dibujamos el diagrama de árbol teniendo en cuenta que, como ya hemos comentado $P(C) = P(X) = {}^{1}\!/_{2}$

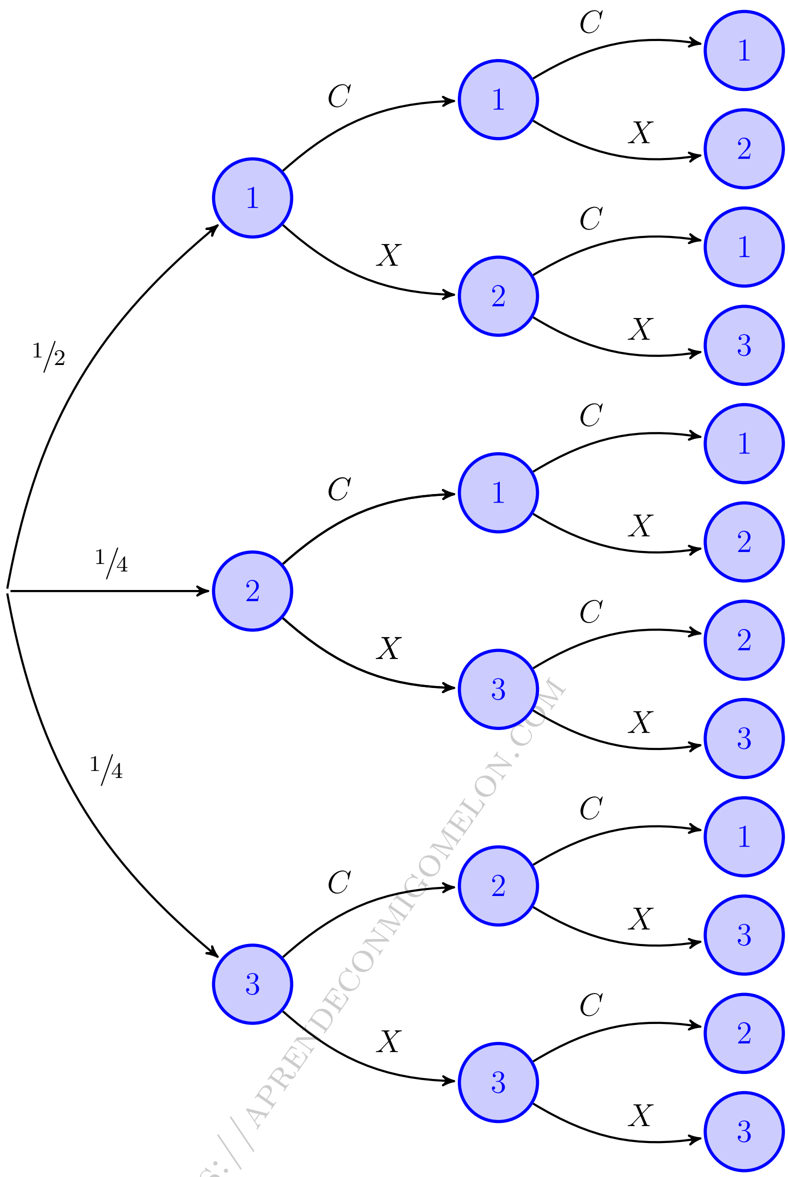


Debido precisamente a que todos los sucesos son equiprobables podemos calcular la probabilidad contando casos favorables y casos posibles:

$$P(\text{“Terminar en casilla 1”}) = \frac{3}{8} = 0.375$$

c) Dibujamos el diagrama de árbol teniendo en cuenta las probabilidades de comenzar en las diferentes casillas:

$$P(1) = \frac{1}{2} \qquad \& \qquad P(2) = \frac{1}{4} \qquad \& \qquad P(2) = \frac{1}{4}$$



$$
\begin{aligned}
P(\text{“Terminar en casilla 1”}) &= P\Big((111)\cup(121)\cup(211)\cup(311)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=0.375\\
P(\text{“Terminar en casilla 2”}) &= P\Big((112)\cup(212)\cup(232)\cup(332)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}=0.3125\\
P(\text{“Terminar en casilla 3”}) &= P\Big((123)\cup(233)\cup(323)\cup(333)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}=0.3125
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Dados los sucesos aleatorios de los que se sabe que

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3} \qquad \& \qquad P(B \mid A) = \frac{3}{4}$$

a) (1 punto) Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría $P(A \cup B)$?

b) (1.5 puntos) Si $P(A \cup B) = 5/6$, ¿cuáles son las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cup \overline{B})$?

(Aragón - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) A y B son independientes $\implies P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = \frac{2}{3} \implies P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot \cancel{P(A)}}{\cancel{P(A)}} = \frac{3}{4} \implies P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \implies \boxed{P(A \cup B) = \frac{11}{12}}$$

b) $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \implies P(B) = \frac{3}{2} \cdot P(A \cap B)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} \implies P(A) = \frac{4}{3} \cdot P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{2} \cdot P(A \cap B) + \frac{4}{3} \cdot P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{11}{6} \cdot P(A \cap B) = \frac{5}{6} \implies P(A \cap B) = \frac{5}{11}$$

$$P(A) = \frac{4}{3} \cdot P(A \cap B) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{11} \implies \boxed{P(A) = \frac{20}{33}}$$

$$P(B) = \frac{3}{2} \cdot P(A \cap B) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{11} \implies \boxed{P(B) = \frac{15}{22}}$$

$$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A \cup \overline{B}}) = 1 - P(\overline{A} \cap B) = 1 - [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - \left(\frac{15}{22} - \frac{5}{11}\right) = 1 - \frac{5}{22} \implies \boxed{P(A \cup \overline{B}) = \frac{17}{22}}$$