MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2025

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025 (Ordinario)

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barritas de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barritas: A y B. Cada barrita A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barrita B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento. Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barritas en total.

a) (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal qeu permita determinar cántas barritas de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.

b) (7 puntos) Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción Obligatoria)

Solución.

	Barrita A	Barrita B	Restricción
Contenido de proteínas (gr)	20	10	≥ 600
Contenido de hidratos (gr)	10	15	≥ 620

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de barritas tipo A"
  $y \equiv$ "Nº de barritas tipo B"

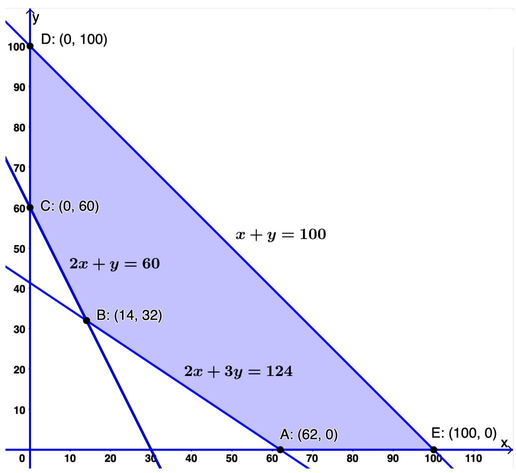
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ 20x + 10y \geq 600 \\ \textcircled{2}\ 10x + 15y \geq 620 \\ \textcircled{3}\ x + y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \textcircled{1}\ 2x + y \geq 60 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (30,0) \\ \textcircled{2}\ 2x + 3y \geq 124 & \rightarrow (2,40) \quad \& \quad (62,0) \\ \textcircled{3}\ x + y \leq 100 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (100,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 1.5x + 1.2y$ (euros)

- `Optimización de F.O.`

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	62	0	93
B	14	32	59.4
C	0	60	72
D	0	100	120
E	100	0	150



El *coste mínimo* es de 59.4 €, con 14 barritas tipo A y 32 tipo B.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Se ha lanzado al mercado la aplicación social ViviChat y el número de usuarios en la aplicación en el momento t está dado por la función $N(t) = 1400 \cdot \left(\dfrac{t}{49+t^2} + 100\right)$, donde t se mide en cientos de días desde el lanzamiento.

a) *(3 puntos) Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento ($t = 0$) es de, al menos, 100000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo.*

b) *(7 puntos) Suponiendo que $t \in [1, 14]$, calcule el valor de t en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días habrán transcurrido desde su lanzamiento?*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción Obligatoria)

Solución.

a)
- $N(0) = 140000 > 100000 \implies$ la campaña de lanzamiento ha sido exitosa.
- $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1400 \cdot \left(\dfrac{t}{49+t^2} + 100\right) = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1400 \cdot (0 + 100) = 140000$

b) $N'(t) = 1400 \cdot \dfrac{49 + t^2 - t \cdot 2t}{(49+t^2)^2} = 1400 \cdot \dfrac{49 - t^2}{(49+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 49 - t^2 = 0 \Rightarrow \cancel{t = -7} \,\&\, t = 7$

	$(1,7)$	$(7,14)$
Signo $N'(t)$	$+$	-
$N(t)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

El número de usuarios $N(t)$ es *creciente* en $(1, 7)$ y *decreciente* en $(7, 14)$, y tiene un *máximo relativo*, que es también absouto en $t = 7 \implies$ 700 días, momento en el que el número de usuarios es $N(7) = 140100$ usuarios.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Una plataforma de streaming desea mejorar su catálogo de películas, para lo cual quiere conocer las preferencias de sus usuarios sobre las películas de Ciencia Ficción y de Comedia, dos de los géneros más populares entre sus suscriptores.

a) (5 puntos) Con el fin de conocer las preferencias de sus usuarios, la plataforma ha realizado una encuesta entre una muestra aleatoria simple de 300 suscriptores. De estos, 210 han indicado que prefieren ver películas de Ciencia Ficción, mientras que el resto prefieren Comedia. Calcule un intervalo de confianza al 96 % para la proporción de suscriptores que prefieren ver Ciencia Ficción.

b) (5 puntos) La plataforma de streaming investiga si la edad de sus usuarios influye en sus preferencias por el género de Ciencia Ficción. Han descubierto que el 60 % de sus usuarios son menores de 30 años y, dentro de este grupo, el 80 % prefiere el género de Ciencia Ficción. En cambio, entre los usuarios de 30 años o más, solo el 50 % tiene esta preferencia. La plataforma ha decidido premiar a uno de sus usuarios al azar con una suscripción gratuita por un año. Sabemos que el ganador prefiere ver películas de Ciencia Ficción. ¿Cuál es la probabilidad de que este usuario tenga menos de 30 años?

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción Obligatoria)

Solución.

a) $n = 300 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{210}{300} = 0.7 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.3 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.96$

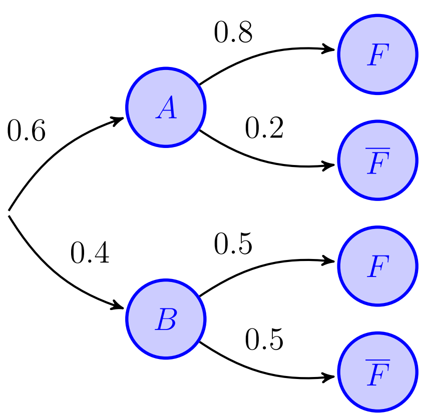
$$1-\alpha = 0.96 \implies \alpha = 0.04 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.02 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.98 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.055$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{300}} = 0.0544$$

$$I.C._{96\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{96\,\%}(p) = (0.6456; 0.7544)}$$

b) Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El usuario es menor de 30 años"
$B \equiv$ "El usuario tiene 30 o más años"
$F \equiv$ "El usuario prefiere la Ficción"



- $$\begin{aligned} P(F) &= P\big((A\cap F)\cup(B\cap F)\big) \\ &= P(A\cap F) + P(B\cap F) \\ &= P(A)\cdot P(F \mid A) + P(B)\cdot P(F \mid B) \\ &= 0.6\cdot 0.8 + 0.4\cdot 0.5 = 0.68 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} P(F \mid A) &= \frac{P(F\cap A)}{P(A)} = \frac{P(F)\cdot P(A \mid F)}{P(A)} \\ &= \frac{0.6\cdot 0.8}{0.68} = 0.7059 \end{aligned}$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Q.1) *(5 puntos) Un estudio revela que los estudiantes de bachillerato pasan, en promedio, 3.5 horas haciendo fila para entrar a conciertos, con una desviación típica de 1.8 horas. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 estudiantes de bachillerato que asisten esta tarde a un concierto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de espera para esa muestra sea inferior a 4 horas?*

Q.2) *(5 puntos) Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$*, resuelva la ecuación matricial* $A \cdot X + 2A = A^2$ *despejando previamente* X*.*

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Espera para entrar en el concierto (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(3.5, 1.8)$$

Q.1) $X : \mathcal{N}(3.5, 1.8) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}(\mu, {}^{\sigma}/\sqrt{64}) = \mathcal{N}(3.5, 0.225)$

$$P(\overline{X} < 4) = P\left(Z < \frac{4 - 3.5}{0.225}\right) = P(Z < 2.22) = 0.9868$$

Q.2) $A \cdot X + 2A = A^2 \implies A \cdot X = A^2 - 2A \implies A \cdot X = A \cdot (A - 2I)$

$$\implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot (A - 2I) \implies \boxed{X = A - 2I}$$

$$X = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Q.1) (5 puntos) Clasifique el sistema de ecuaciones S utilizndo el teorema de Rouché-Frobenius y, si es posible, calcule la solución.

$$S(x) \equiv \begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

Q.2) (5 puntos) Dada $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{6-x}}{x-2}$. Calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. ¿La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$? Justifique la respuesta basándose en el cálculo del límite.

(Aragón - Matemáticas CCSS - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

Q.1) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

- `Discusión del sistema:`
  $|A| = 4 \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- `Resolución del sistema:`

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + 2F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 0 + 2 \cdot (-1) = -4 \\ \Rightarrow -2y + 2 \cdot (-1) = -2 \\ \Rightarrow -2z = 2 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}}$$

Q.2) $$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{6-x}}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{\left(x - \sqrt{6-x}\right) \cdot \left(x + \sqrt{6-x}\right)}{(x-2) \cdot \left(x + \sqrt{6-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - (6-x))}{(x-2) \cdot \left(x + \sqrt{6-x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x-2) \cdot \left(x + \sqrt{6-x}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+3) \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)} \cdot \left(x + \sqrt{6-x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x + \sqrt{6-x}} = \frac{5}{2+2} = \frac{5}{4}$$

En $x = 2$ no hay A. Vertical puesto que, pese a que $2 \notin \text{Dom}(f)$, el $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq \pm\infty$