MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2025
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2025

Ejercicio 1A (2.5 *puntos*)

En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- *El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80 % en tiros de uno, del 50 % en tiros de dos y del 40 % en tiros de tres.*
- *La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.*
- *El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.*

(Madrid - Matemáticas II - junio 2025 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“Nº de lanzamientos de 1 punto”}$$
$$y \equiv \text{“Nº de lanzamientos de 2 puntos”}$$
$$z \equiv \text{“Nº de lanzamientos de 3 puntos”}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} 0.8x + 0.5 \cdot 2y + 0.4 \cdot 3y = 80 \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+z}{5} \\ 2z + 5 = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 10y + 12z = 800 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 400 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 400 \\ 3 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 14 & 380 \\ 0 & -8 & 9 & -15 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_2 + 8F_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 14 & 380 \\ 0 & 0 & 121 & 3025 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 30 - 2 \cdot 25 = 5 \\ \Rightarrow y + 14 \cdot 25 = 380 \\ \Rightarrow 121z = 3025 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 25 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{array}}$$

Ejercicio 1B (2.5 *puntos*)

Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *e* I *la matriz identidad de orden* 3*. Se pide:*

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ *y hallar las raíces reales del polinomio.*

b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$*, calcular un vector no nulo* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *que satisfaga que* $(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 7\lambda + 10) = -(\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda - 5) = 0 \implies \boxed{\lambda = \{2, 5\}}$$

b) Para $\lambda = 5 \implies A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0} \implies \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \Big[\, F_2 + 2F_1 \,\Big] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow -x + \lambda = 0 & \Rightarrow & x = \lambda \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow & y = \lambda \\ \Rightarrow 3\lambda + 2\lambda - 3z = 0 & \Rightarrow & z = 5\lambda/3 \end{array} \xRightarrow{\lambda=3} \boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) *(0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?*

b) *(1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.*

c) *(0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción Unica)

Solución.

a) $f'(x) = -\frac{\pi}{9} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{9} = k\pi \Rightarrow x = 9k,\ k = 0, 1, \ldots \xRightarrow{x \in [0,12]} x = \{0, 9\}$

	$(0, 9)$	$(9, 12)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(9, 12)$ y *decreciente* en $(0, 9)$, y tiene un *mínimo relativo*, que es también *absoluto* en $(9, 1)$ y como $f(0) = 3$ & $f(12) = 3/2$, la función tiene un *máximo absoluto* en $(0, 3)$. Como el mínimo absoluto es ≥ 0 y el máximo absoluto es ≤ 3, podemos afirmar que la curva está íntegramente contenida en el muro.

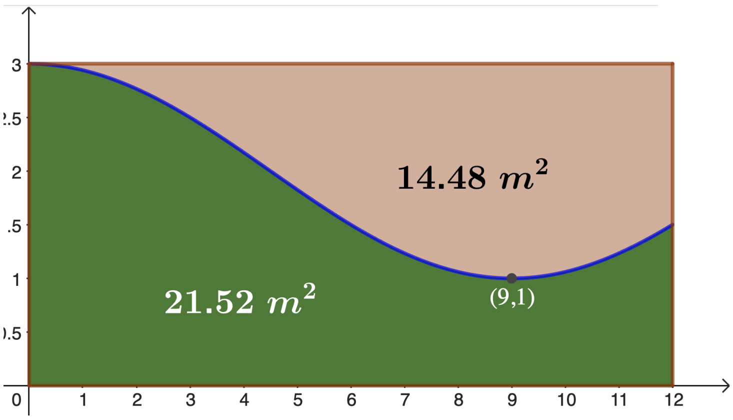
b) La función $f(x)$ no corta al eje OX pues el mínimo absoluto es > 0, lo que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 12)$. Además en el intervalo $[0, 12]$ la función es positiva.

$$\text{Área} = \int_0^{12} f(x)\, dx = \int_0^{12} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2\right] dx = \frac{9}{\pi} \int_0^{12} \underbrace{\frac{\pi}{9}}_{u'} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)}_{\cos u} dx + \int_0^{12} 2\, dx$$

$$= \frac{9}{\pi} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x\Big]_0^{12} = \left(-\frac{9}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 24\right) - 0 = \frac{48\pi - 9\sqrt{3}}{2\pi} = 21,52\ m^2$$

Por lo tanto la superficie del muro inferior a la curva será de $21.52\ m^2$, mientras que el área superior $12 \cdot 3 - 21.52 = 14.48\ m^2$.

c) Para pintar la parte inferior del muro habrá que usar $\frac{21.52}{3} = 7.17 \Longrightarrow$ 8 botes de spray.



3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
14.48 m^2
21.52 m^2
(9,1)

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Dados la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{1}$ *y el plano* $\pi \equiv x + 2y - 3z = 1$*, se pide:*

a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r *y es perpendicular a* π*.*

b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π *que corta perpendicularmente a* r*.*

c) (1 punto) Hallar los puntos de la recta r *cuya distancia al plano* π *sea* $\sqrt{14}$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,0,2) \\ \vec{d}_r = (2,0,1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

a) $$\pi' \equiv \begin{cases} R(1,0,2) \\ \vec{d}_r = (2,0,1) \\ \vec{n}_\pi = (1,2,-3) \end{cases} \implies \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -2 \cdot (x-1) + 7y + 4 \cdot (z-2) = 0 \implies \boxed{\pi' \equiv 2x - 7y - 4z + 6 = 0}$$

b) Si la recta s pedida está contenida en π y corta a r pasará por el punto $P = r \cap \pi$. Por otra parte si la recta corta perpendicularmente a r y ha de pasar por el punto P, estará contenida en un plano $\pi'' \perp r$ que pasa por P. La recta s será por tanto $s = \pi \cap \pi''$

$$P = r \cap \pi \implies (1+2\lambda) + 0 - 3(2+\lambda) = 1 \xrightarrow{\lambda=-6} P(-11,0,-4)$$

$$\pi'' \equiv \begin{cases} P(-11,0,-4) \\ \vec{n}_{\pi''} = \vec{d}_r = (2,0,1) \end{cases} \implies \pi'' \equiv 2x+z+D = 0 \xrightarrow[D=26]{P\in\pi''} \pi'' \equiv 2x+z+26 = 0$$

$$s = \pi \cap \pi'' \implies s \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ 2x + z + 26 = 0 \end{cases}$$

c) Los puntos de la recta r son de la forma $Q(1+2\lambda, 0, 2+\lambda)$.

$$d(Q,\pi) = \frac{|1 + 2\lambda + 0 - 3 \cdot (2+\lambda) - 1|}{\sqrt{1+4+9}} = \sqrt{14} \implies |-\lambda - 6| = 14$$

$$\implies \begin{cases} -\lambda - 6 = 14 \xrightarrow{\lambda=-20} \boxed{Q_1(-39,0,-18)} \\ -\lambda - 6 = -14 \xrightarrow{\lambda=8} \boxed{Q_2(17,0,10)} \end{cases}$$

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y=2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción B)

Solución.

a) $d(P,\pi) = \dfrac{|0+1-2|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ u^2$

b) El punto Q será la intersección de π con la recta $r \perp \pi$ que pasa por P

$$r \equiv \begin{cases} P(0,1,1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1,1,0) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$$Q = r \cap \pi \implies \lambda + 1 + \lambda = 2 \implies \lambda = \tfrac{1}{2} \implies \boxed{Q(1/2, 3/2, 1)}$$

c) $A = \pi \cap OX \xRightarrow[z=0]{y=0} x = 2 \implies A(2,0,0)$

$B = \pi \cap OY \xRightarrow[z=0]{x=0} y = 2 \implies B(0,2,0)$

$$Area_{\overset{\triangle}{ABP}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot|(2,2,2)| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{3}\ u^2$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ *un espacio muestral y* P *una medida de probabilidad en* E *definida por:* $P(7) = P(3) = \dfrac{1}{4}$ *y con el resto de sucesos elementales equiprobables.*
Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ *y* $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$.
Se pide calcular

a) *(1.25 puntos)* $P\Big((\overline{A - C}) \cap B\Big)$.

b) *(1.25 puntos)* $P\Big((A \cap B) \mid \overline{C}\Big)$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2025 - Opción A)

Solución.

a) Sea p la probabilidad de cada uno de los sucesos distintos de $\{3\}$ y $\{7\}$. Como $P(E) = 1$ y los sucesos son disjuntos: $2 \cdot \dfrac{1}{4} + 6p = 1 \Longrightarrow p = \dfrac{1}{12}$

$A - C = \{19\} \Rightarrow \overline{A - C} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \Longrightarrow (\overline{A - C}) \cap B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$

$P\Big((\overline{A - C}) \cap B\Big) = 4 \cdot \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$

b) $A \cap B = \{7, 13\}$ & $\overline{C} = \{2, 17, 19\} \Longrightarrow A \cap B \cap \overline{C} = \varnothing$

$P\Big((A \cap B) \mid \overline{C}\Big) = \dfrac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(\varnothing)}{P(\{2, 17, 19\})} = \dfrac{0}{3 \cdot \frac{1}{12}} = 0$

Nota: $P(\{a, b, c\}) = P(\{a\} \cup \{b\} \cup c = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\})$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20 % de la población tienen entre 14 y 24 años, el 50 % entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74 % de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8 % entre los de 25 a 64 y al 53.7 % entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

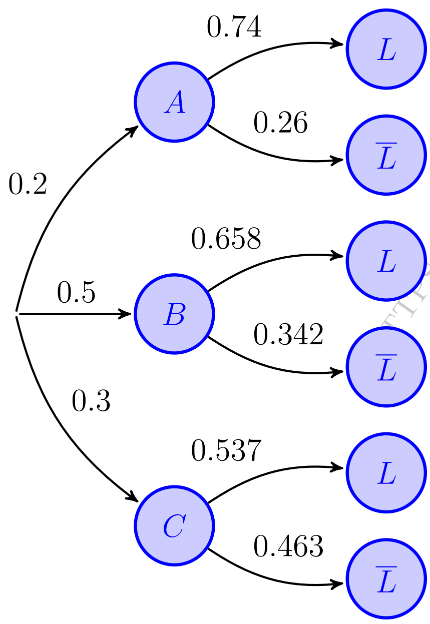
b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

(Madrid - Matemáticas II - junio 2025 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El ciudadano tiene 14 y 24 años”}$$
$$B \equiv \text{“El ciudadano tiene entre 25 y 64 años”}$$
$$C \equiv \text{“El ciudadano tiene más de 64 años”}$$
$$L \equiv \text{“El ciudadano es lector habitual”}$$



a) $$\begin{aligned} P(L) &= P\big((A\cap L)\cup(B\cap L)\cup(C\cap L)\big) \\ &= P(A\cap L)+P(B\cap L)+P(C\cap L) \\ &= P(A)\cdot P(L\mid A)+P(B)\cdot P(L\mid B) \\ &+ P(C)\cdot P(L\mid C) = 0.2\cdot 0.74 \\ &+ 0.5\cdot 0.658 + 0.3\cdot 0.537 = 0.6381 \end{aligned}$$

b) $$P(B\mid \overline{L}) = \frac{P(B\cap\overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{P(B)\cdot P(\overline{L}\mid B)}{1-P(L)} = \frac{0.5\cdot 0.342}{1-0.6381} = 0.4725$$