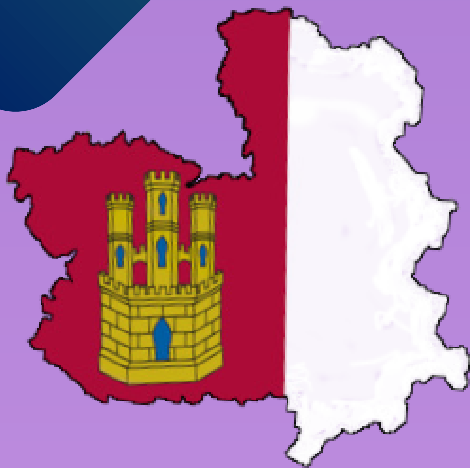
MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2025

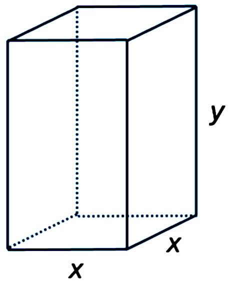
https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2025

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



a) *(1 punto) Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).*

b) *(1 punto) Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.*

c) *(0.5 puntos) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2.*

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Modelo 2025

Solución.

a) $$\left.\begin{array}{l} V = x^2 y = 1 \implies y = \dfrac{1}{x^2} \\ S(x,y) = 2x^2 + 4xy \end{array}\right\} \implies S(x) = 2x^2 + \frac{4x}{x^2} \implies \boxed{S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}}$$

b) $S'(x) = 4x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \implies 4x^3 = 4 \implies x = 1$

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $S'(x)$	-	$+$
$S(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La superficie $S(x)$ es *decreciente* en $(0,1)$ y *creciente* en $(1,+\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $x = 1\ dm$ & $y = \dfrac{1}{1^2} = 1\ dm$.

c) La supercie mínima es $S(1) = 2 + \dfrac{4}{1} = 6\ dm^2$

El coste será de $C(x) = 5 \cdot S(x) = 5 \cdot 6 = 30$ €

Ejercicio 2A (2.5 *puntos*)

Carla está diseñando el tejado de una casa con Geogebra. *Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.*

a) (1 punto) Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la longitud de la viga?

c) (1 punto) Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) $r \equiv \begin{cases} A(2,-1,3) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{AB} = (-4,5,2) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 2-4\lambda \\ y = -1+5\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\ell = d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(-4,5,2)| = \sqrt{16+25+4} = 3\sqrt{5}\ u$

c) $\text{Área}_{\underset{ABC}{\triangle}} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \right| = \dfrac{1}{2} \cdot |(-12,-12,6)| = \dfrac{1}{2} \cdot 18 = 9\ u^2$

Ejercicio 2B (2.5 *puntos*)

a) (1.25 puntos) Sean los vectores $\vec{u} = (1,a,a)$ y $\vec{v} = (-1,0,2)$, con $a \in \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de $60°$.

b) (1.25 puntos) Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1,2,1)$ y $\vec{v} = (1,0,0)$.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \implies \cos(60°) = \dfrac{(1,a,a)\cdot(-1,0,2)}{\sqrt{2a^2+1}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{2a-1}{\sqrt{10a^2+5}} = \dfrac{1}{2}$

$\implies 4a-2 = \sqrt{10a^2+5} \implies 16a^2+4-16a = 10a^2+5 \implies 6a^2-16a-1=0$

$\implies \boxed{a = \dfrac{8+\sqrt{70}}{6}}$

La solución $a = \frac{8-\sqrt{70}}{6}$ conduce a un producto escalar negativo por lo que no sería válida.

b) $r \equiv \begin{cases} A(1,0,0) \\ \vec{d_r} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,-2) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

b) (1 punto) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - 7a + 10 = 0 \implies a = \{2, 5\}$$

- Si $a \neq \{2, 5\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 5 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 - 8F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 0 + 1 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 1 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4z = -4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

a) *(1.25 puntos) Estudia el rango de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *en función de los valores de* $a \in \mathbb{R}$.

b) *(1.25 puntos) Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *con* $a \in \mathbb{R}$. *¿Existe algún valor de* a *para el que la matriz* A *y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.*

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 \ \forall a \in \mathbb{R}$

b) Si $A = A^{-1} \implies A \cdot A = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \implies A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a^2 + 1 = 1 \Rightarrow a = 0 \\ \boxed{a = 0} \\ 1 = 1 \ \checkmark \end{cases}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

a) *Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.2 \quad P(A \cap B) = 0.1 \quad P(A \cup B) = 0.3$. Calcula:*

a.1) *(0.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap \overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de B.*

a.2) *(0.5 puntos) $P(A \mid B)$ y $P(B \mid A)$.*

b) *En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).*

b.1) *(0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?*

b.2) *(0.75 puntos) Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?*

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Modelo 2025

Solución.

a) a.1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.3 = 0.2 + P(B) - 0.1 \Rightarrow P(B) = 0.2$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.1 \implies P(A \cap \overline{B}) = 0.1$$

a.2) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.2} = 0.5$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

b) Sean los sucesos:

$$V_i \equiv \text{“La carta } i \text{ tiene un punto verde”}$$
$$R_i \equiv \text{“La carta } i \text{ tiene un punto rojo”}$$

b.1) $P(V_1 \cap V_2) = \dfrac{11}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{11}{156} \approx 0.0705$

b.2) $P(R_1 \mid V_1) = \dfrac{P(R_1 \cap V_1)}{P(V_1)} = \dfrac{7/40}{11/40} = \dfrac{7}{11} \approx 0.6364$

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

a) *En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practican natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21 % de los socios que juegan al tenis, 30 % de los que practican natación y 12 % de los que practican el golf.*

a.1) *(0.5 puntos) Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.*

a.2) *(0.75 puntos) Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.*

b) *El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.*

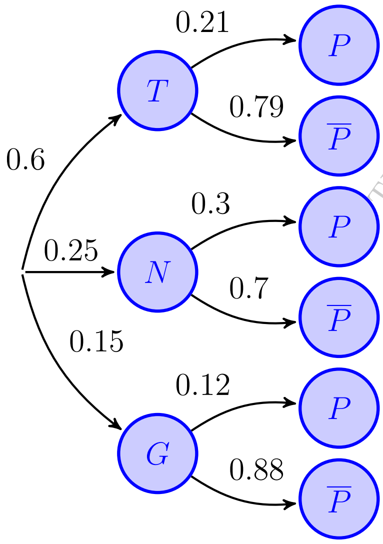
b.1) *(0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?*

b.2) *(0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?*

(Castilla-La Mancha - Matemáticas II - Modelo 2025

Solución.

a) Sean los sucesos: $T \equiv$ "El socio practica tenis" $\quad N \equiv$ "El socio practica natación"
$G \equiv$ "El socio practica golf" $\quad P \equiv$ "El socio obtiene un premio"



a.1) $$P(P) = P\Big((T\cap P)\cup(N\cap P)\cup(G\cap P)\Big) = P(T\cap P)+P(N\cap P)+P(G\cap P) = P(T)\cdot P(P\mid T)+P(N)\cdot P(P\mid N) + P(G)\cdot P(P\mid G) = 0.6\cdot 0.21 + 0.25\cdot 0.3 + 0.15\cdot 0.12 = 0.219$$

a.2) $$P(N\mid P) = \frac{P(N\cap P)}{P(P)} = \frac{P(N)\cdot P(P\mid N)}{P(P)} = \frac{0.25\cdot 0.3}{0.219} = 0.3425$$

b) $X \equiv$ "Tiempo en recorrer 5 km (minutos)" $\longrightarrow \mathcal{N}(60, 8)$

b.1) $$P(X\le 50) = P\left(Z \le \frac{50-60}{8}\right) = P(Z\le -1.25) = P(Z\ge 1.25) = 1 - P(Z\le 1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

b.2) $$P(50\le X\le 66) = P\left(\frac{50-60}{8} \le Z \le \frac{66-60}{8}\right) = P(-1.25\le Z\le 0.75) = P(Z\le 0.75) - P(Z\le -1.25) = 0.7734 - 0.1056 = 0.6678$$