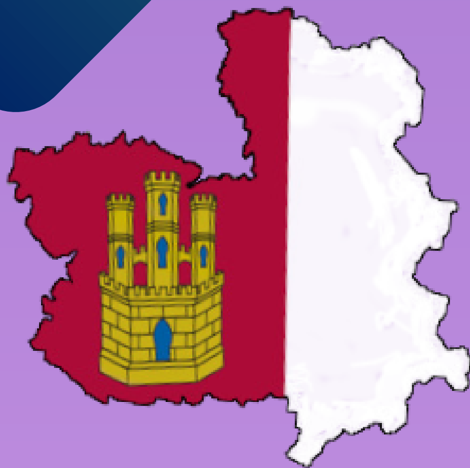
MATEMATICAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2025

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2025

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Un centro de procesamiento de datos ha tomado una muestra de su consumo eléctrico en una muestra de 10 meses, obteniendo 26, 33, 25, 24, 32, 28, 38, 29, 22 y 33 MWh. Si el consumo mensual de electricidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ MWh,

a) (1 punto) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del consumo eléctrico con un nivel de confianza del 97.08 %.

b) (1 punto) Calcula el tamaño nínimo necesario de una muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 MWh.

c) (0.5 puntos) Razona si, con los datos y resultados disponibles, se puede afirmar que el consumo eléctrico mensual es inferior a 25 MWh.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción Unica)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo eléctrico (MWh)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{26+33+25+24+32+28+38+29+22+33}{10} = 29 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9708$

$1-\alpha = 0.9708 \Rightarrow \alpha = 0.0292 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0146 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.9854 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.18$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.18 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{10}} = 3.45$

$I.C._{97.08\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{97.08\,\%}(\mu) = (25.55; 32.45)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 2 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.9708$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.18 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2.18 \cdot \dfrac{5}{2}\right)^2 = 29.7 \implies \boxed{n = 30 \text{ meses}}$

c) $25 \notin I.C._{97.08\,\%}(\mu) \implies$ No es razonable pensar que el consumo eléctrico mensual es inferior a 25 MWh.

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

En la fase nacional de la olimpiada de matemáticas española, se reparten un total de 38 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) (1.5 puntos) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten.

b) (1 punto) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción Unica)

Solución.

a) Sean las incógnitas: $x \equiv$ "Nº de medallas de oro"
$y \equiv$ "Nº de medallas de plata"
$z \equiv$ "Nº de medallas de bronce"

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=36 \\ z=3x \\ z+2=2\cdot(y-2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=36 \\ 3x-z=0 \\ 2y-z=6 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-3F_1 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -3 & -4 & -108 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 3F_2+2F_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 38 \\ 0 & -3 & -4 & -108 \\ 0 & 0 & -11 & -198 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+12+18=36 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y-4\cdot 18=-108 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -11z=-198 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=6 \\ y=12 \\ z=18 \end{array}}$$

Por lo tanto se han repartido 6 medallas de oro, 12 de plata y 18 de bronce.

Ejercicio 3A (2.5 *puntos*)

El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días ($x \equiv$ días) viene expresado por la función

$$P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & , \text{ si } 0 \le x \le c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & , \text{ si } c < x < 10 \end{cases}$$

a) (1 punto) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$?

b) (0.75 puntos) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día?

c) (0.75 puntos) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

a) `Continuidad en` $x = c$:

- $\lim\limits_{x\to c^-} P(x) = \lim\limits_{x\to c}\left(18x^2 - 100x + 162\right) = 18c^2 - 100c + 162$
- $\lim\limits_{x\to c^+} P(x) = \lim\limits_{x\to c}\left(-x^3 + 18x^2 - 96x + 162\right) = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162$
- $P(c) = 18c^2 - 100c + 162$

$P(x)$ es continua en $x = c \iff \lim\limits_{x\to c^-} P(x) = \lim\limits_{x\to c^+} P(x) = P(c)$

$\implies 18c^2 - 100c + 162 = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162 \implies c^3 - 4c = 0 \implies c \cdot (c^2 - 4) = 0$

$\implies c = \{\cancel{-2}, 0, 2\} \implies \boxed{c = \{0, 2\}}$ (la solucín negativa es absurda)

b) Para $c = 2$, a partir del segundo día, $P(x) = -x^3 + 18x^2 - 96x + 162$

$P'(x) = -3x^2 + 36x - 96 = 0 \implies x = \{4, 8\}$

	$(2,4)$	$(4,8)$	$(8,10)$
Signo $P'(x)$	-	+	-
$P(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

$$P(2) = 34 \quad \& \quad P(4) = 2 \quad \& \quad P(8) = 34 \quad \& \quad P(10) = 2$$

Por lo tanto el precio máximo es de 34 € el segundo y octavo día y el *mínimo* es de 2 € el día cuarto (el décimo no pertenece al dominio).

c) El precio $P(x)$ es *creciente* en $(4, 8)$ y *decreciente* en $(2, 4) \cup (8, 10)$.

Ejercicio 3B (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que la función tiene un máximo relativo en el punto $(1, 0)$, un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$ y la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 2$ es -9.

a) (1.5 puntos) Encuentra el valor de los parámetros a, b, c y d.

b) (1 punto) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \& \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \& \quad f''(x) = 6ax + 2b$

- Pasa por $(1,0) \implies f(1) = 0 \implies ⦿\ a + b + c + d = 0$
- Máximo en $x = 1 \implies f'(1) = 0 \implies ⊛\ 3a + 2b + c = 0$
- P.I. en $x = 0 \implies f''(0) = 0 \implies 2b = 0 \implies \boxed{b = 0}$
- Pendiente R.T. -9 en $x = 2 \implies f'(2) = -9 \implies ⦿⊛\ 12a + 4b + c = -9$

$$\xRightarrow{c=0} \begin{cases} ⦿\ a + c + d = 0 \\ ⊛\ 3a + c = 0 \\ ⦿⊛\ 12a + c = -9 \end{cases} \implies \boxed{\begin{array}{c} a = -1 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{array}}$$

Con estos valores la función queda:

$f(x) = -x^3 + 3x - 2 \quad \& \quad f'(x) = -3x^2 + 3 \quad \& \quad f''(x) = -6x \quad \& \quad f'''(x) = -6$

Y tenemos que comprobar que:

- Máximo en $x = 1 \implies f''(1) = -6 < 0 \xRightarrow{(\cap)}$ Máximo en $x = 1$ ✓
- P.I. en $x = 0 \implies f'''(0) = -6 \neq 0 \implies$ Punto de Inflexión en $x = 0$ ✓

b) $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I \implies A \cdot B \cdot X - C \cdot X = I \implies (A \cdot B - C) \cdot X = I$

$$\implies \underbrace{(A \cdot B - C)^{-1} \cdot (A \cdot B - C)}_{I} \cdot X = (A \cdot B - C)^{-1} \cdot I \implies \boxed{X = (A \cdot B - C)^{-1}}$$

$$X = (A \cdot B - C)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

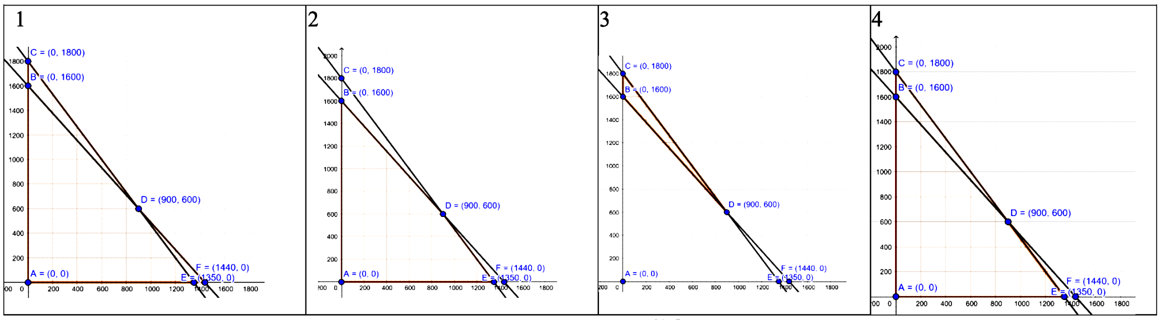
$$= \left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4A (2.5 *puntos*)

Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0.2 m^2 de cartón y 30 cm de cinta de goma y se vende a 2.10 € la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0.15 m^2 de cartón y 27 cm de cinta de goma y se vende a 1.50 € la unidad. Sabiendo que se venden todas las carpetas que se fabrican:

a) (0.75 puntos) Expresa la función objetivo para la venta de carpetas.

b) (0.75 puntos) Determina, razonadamente, cuál de las siguientes regiones factibles corresponden al problema planteado.



c) (1 punto) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo y calcula el beneficio.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción A)

Solución.

	Tamaño folio	Tamaño cuartilla	Restricción
Cartón (m^2)	0.2	0.15	≤ 270
Cinta de goma (m)	0.3	0.27	≤ 432
Precio de venta (€/ud)	2.1	1.5	

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Nº de carpetas de tamaño folio"
  $y \equiv$ "Nº de carpetas de tamaño cuartilla"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

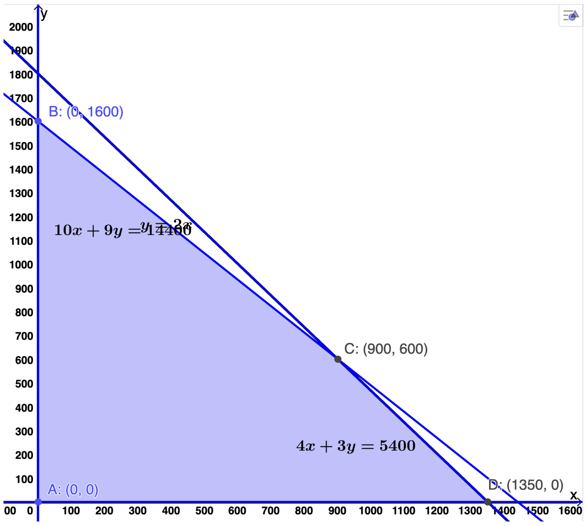
$$\begin{cases} (1)\ 0.2x + 0.15y \leq 270 \\ (2)\ 0.3x + 0.27y \leq 432 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ 4x + 3y \leq 5400 & \to (0, 1800) \quad \& \quad (1350, 0) \\ (2)\ 10x + 9y \leq 14400 & \to (0, 1600) \quad \& \quad (1440, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 2.1x + 1.5y \text{ (euros)}$$

- **`Región factible`** Representamos la región y calculamos los vértices.
- **`Optimización de F.O.`** Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	1600	2400
C	900	600	2790
D	1350	0	2835



b) La solución del problema corresponde a la región factible nº 2.

c) El *beneficio máximo* es de 2835 €, vendiendo 1350 carpetas tamaño folio.

Ejercicio 4B (2.5 *puntos*)

Una tienda online de telefonía ha vendido en mayo 360 teléfonos móviles, de los cuales 144 son iPhone, 126 Samsung y el resto Xiaomi. Sin embargo, se devolvieron el 4 % de los iPhone, el 5 % de los Samsung y el 3 % de los Xiaomi.

a) (0.75 puntos) Elegida una venta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no se produzca la devolución del teléfono?

b) (0.5 puntos) Si se sabe que un teléfono ha sido devuelto, ¿cuál es la probabilidad de que sea Samsung?

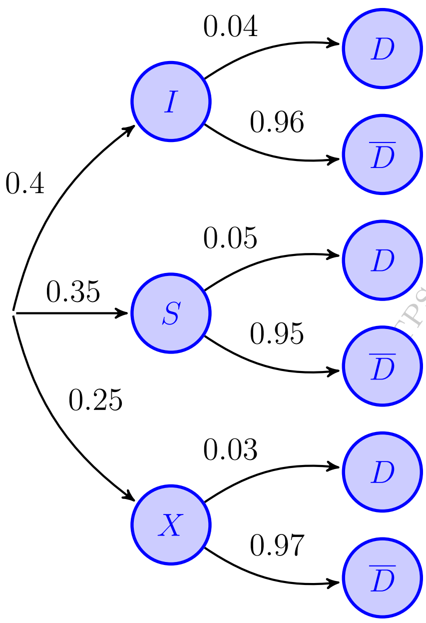
c) (1.25 puntos) Si se sabe que la venta diaria de teléfonos sigue una función de la forma: $V(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra los valores de los parámetros a, b y c sabiendo que la venta en el instante inicial es tres, $V(0) = 3$, el primer día se venden 8 móviles y la función tiene como recta tangente en ese punto la ecuación $y = 2x + 6$.

(Castilla-La Mancha - Matemáticas CCSS - Modelo 2025 - Opción B)

Solución.

$I \equiv$ "El móvil es de la marca iPhone" $\quad S \equiv$ "El móvil es de la marca Samsung"

$X \equiv$ "El móvil es de la marca Xiaomi" $\quad D \equiv$ "El móvil es devuelto"



$$P(I) = \frac{144}{360} = 0.4 \qquad \& \qquad P(S) = \frac{126}{360} = 0.35$$

$$P(X) = 1 - [P(S) + P(X)] = 1 - (0.4 + 0.35) = 0.25$$

a) $$P(\overline{D}) = P\big((I \cap \overline{D}) \cup (S \cap \overline{D}) \cup (X \cap \overline{D})\big)$$
$$= P(I \cap \overline{D}) + P(S \cap \overline{D}) + P(X \cap \overline{D})$$
$$= P(I) \cdot P(\overline{D} \mid I) + P(S) \cdot P(\overline{D} \mid S)$$
$$+ P(X) \cdot P(\overline{D} \mid X) = 0.4 \cdot 0.96$$
$$+ 0.35 \cdot 0.95 + 0.25 \cdot 0.97 = 0.959$$

b) $$P(S \mid D) = \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{P(S) \cdot P(D \mid S)}{1 - P(\overline{D})}$$
$$= \frac{0.35 \cdot 0.05}{1 - 0.959} = 0.4268$$

c) $V(x) = ax^3 + bx^2 + c \qquad \& \qquad V'(x) = 3ax^2 + 2bx \qquad \& \qquad V''(x) = 6ax + 2b$

- $V(0) = 3 \implies \boxed{c = 3}$
- $V(1) = 8 \implies a + b + c = 8 \xrightarrow{c=3} \odot\ a + b = 5$
- R.T. en $x = 1$ es $y = 2x + 6 \implies m_r = f'(1) = 2 \implies \circledast\ 3a + 2b = 2$

$$\begin{cases} \odot\ a + b = 5 \\ \circledast\ 3a + 2b = 2 \end{cases} \implies \boxed{\begin{array}{c} a = -8 \\ b = 13 \end{array}}$$